前　言

本书是一本专门研究棋盘上的数学问题的书.

棋盘上的数学问题,最初只是作为一种数学游戏.但随着数学的不断发展,特别是计算机的不断普及以及数学竞赛的深入开展,棋盘上的数学问题不断得到开发和利用.现在,棋盘上的数学问题涉及到程序设计,图论,对策论,组合论等的各个方面,而且在生产、生活实际中有着广泛的应用,因而引起人们对之进行深入的研究.

近几年来,作者在数学教学和数学研究中,遇到了大量与棋盘有关的数学问题.现将这些内容整理、归类成五个方面的问题,称之为棋盘上的组合数学.其中有些问题已经解决,有些问题还没有解决,有待读者进一步研究.对已经解决的问题,重点剖析解决这些问题的基本途径;对没有解决的问题,则从不同的侧面进行分析和探索.书中的大部分内容是作者在数学研究中的最新成果.但为系统性起见,书中也选用了一些专著、史料、书刊中的少量其他作者的结果,这些一般都在书中一一注明,以示尊重.但也有个别结果不知出处,因而只"援引作者的证明,而不是援引他们的姓名"(帕斯卡语).在此,特向这些原作者致以谢意!

在编排上,本书各章的内容是相对独立的,但也注意了各节之间的联系.每章之后配有习题,可供读者练习.书后附有解答,以供查对.不必否认,数学并不是一门人人都喜欢的学科.数学家帕斯卡就曾说过:数学研究的对象是这样的严肃,最好不要失去机会把它们变得稍微有趣些.正是基于这种想

法，作者写成了此书．倘若能够使读者对一些数学问题产生兴趣，甚至激发出读者研究数学的热情，那就是作者所希望的．

限于水平，书中谬误难免．恳请专家、读者不吝指正，以便有机会再版时修改．

作者非常感谢上海科技出版社的田廷彦编辑，他曾阅读了本书的初稿，并提供了宝贵的意见．

冯跃峰

1998 年秋

目　　录

第一章　棋盘的覆盖

象棋是大家非常喜爱的一种博弈游戏，其工具由棋盘和棋子两个方面构成.阅读本书的读者也许都有过下棋的经历，对棋和棋盘是最熟悉不过的了.就是这样一个普普通通的棋盘，却隐含着大量深刻而有趣的数学问题.

当然，本书中所说的棋盘并不局限于 8×8 的国际象棋盘和 9×10 的中国象棋盘，而是数学化了的 $m\times n$ 棋盘.所谓 $m\times n$ 棋盘，是指由 m 行 n 列方格构成的 $m\times n$ 矩形，简称棋盘.每个方格称为棋盘的格，位于第 i 行第 j 列的格记为 a_{ij}.当 $i+j$ 为奇(偶)数时，称格 a_{ij} 为奇(偶)格.显然 $m\times n$ 棋盘共有 mn 个格.

本章中，我们讨论棋盘中的一个典型问题——棋盘的覆盖.

所谓棋盘的*覆盖*，是指用若干个图形去覆盖 $m\times n$ 棋盘.覆盖棋盘的每个图形也由若干个方格组成，我们称之为*覆盖形*.在棋盘的覆盖中，约定任何两个覆盖形互不重叠，且任何一个覆盖形的任何一个格总与棋盘的某个格重合.

1.1　棋盘的完全覆盖

定义 1　在棋盘的覆盖中，若各个覆盖形的总格数等于棋盘的总格数，则称此覆盖为*完全覆盖*.

显然，完全覆盖是一种既无间隙又不重叠的覆盖.

定义 2 在棋盘的覆盖中,若只含有一种形状的覆盖形,则称之为同形覆盖,否则称之为异形覆盖.

我们先讨论 $m\times n$ 棋盘的同形完全覆盖.一个最简单的结果如下:

定理 1 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 $k\mid m$ 或 $k\mid n$.

证:充分性是显然的.下证必要性.

现设 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖.在 $m\times n$ 棋盘的各个格中填数:第一列的格从上至下依次填 $1,2,\cdots,m$.此外,对其中的任何一行,所填各数从左至右构成公差为 1 的等差数列.这样,每一个 $1\times k$ 矩形在棋盘的覆盖中所盖住的格所填的数恰好构成模 k 的一个完系.因为 $m\times n$ 棋盘存在 $1\times k$ 矩形的完全覆盖,所以,$m\times n$ 棋盘中所填的数属于模 k 的不同剩余类中的数的个数相等.

设 $m=pk+s$, $n=qk+t$ $(0\leqslant s,t<k)$.反设 $st\neq0$,则不妨设 $0<s\leqslant t<k$.将 $m\times n$ 棋盘按图 1 方式分为 3 块:一个 $s\times t$ 矩形,一个 $pk\times n$ 矩形和一个 $s\times qk$ 矩形.

$s\times t$	$s\times qk$
$pk\times n$	

图 1

显然,$pk\times n$ 矩形和 $s\times qk$ 矩形中属于模 k 的各个不同剩余类中的数的个数相等,从而 $s\times t$ 矩形中属于模 k 的不同剩余类的数的个数也相等.考察 $s\times t$ 矩形中所填的数(图 2):

1	2	3	……	$t-1$	t
2	3	4	……	t	$t+1$
……					
$s-1$	s	$s+1$	……	$s+t-3$	$s+t-2$
s	$s+1$	$s+2$	……	$s+t-2$	$s+t-1$

图 2

将上述数表作如下改造：对表中任何一个数 a，若 $a > k$，则将 a 换作 $a-k$. 这样得到一个新的数表. 将新数表记为 A，考察数 t 与 $t+1$ 在表 A 中出现的次数. 显然，在前 t 条对角线上不出现 $t+1$. 又 $s+t-1<k+t-1<k+t+1$，所以在第 $j(j>t+1)$ 条对角线上也不出现 $t+1$. 所以，$t+1$ 都在第 $t+1$ 条对角线上，即 $t+1$ 共出现 $s-1$ 次. 注意到第 t 条对角线上的数都为 t，所以 t 在表 A 中至少出现 s 次. 于是，t 出现的次数多于 $t+1$ 出现的次数，矛盾.

有以上的定理 1 为基础，便可彻底解决 $m \times n$ 棋盘的 $p \times q$ 矩形完全覆盖问题.

定理 2 $m \times n$ 棋盘存在 $p \times q$ 矩形的完全覆盖的充分必要条件是 m,n 满足下列条件之一：

(i) $p \mid x$ 且 $q \mid y$；

(ii) $p \mid x$，$q \mid x$，且存在自然数 a,b，使 $y=ap+bq$.

其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$.

证：充分性.

若 $p \mid x$ 且 $q \mid y$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$. 不妨设 $p \mid m$ 且 $q \mid n$. 令 $m=ps$，$n=qt$，则 $m \times n$ 棋盘可以划分为 $s \times t$ 个 $p \times q$ 矩形，结论成立；若 $p \mid x$，$q \mid x$，且存在自然数 a，b，使 $y=ap+bq$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$，不妨设 $p \mid m$，$q \mid m$，且存在自然数 a,b，使 $n=ap+bq$. 那么，将 $m \times n$ 棋盘划分为两个棋盘：一个 $m \times ap$ 棋盘，一个 $m \times bq$ 棋盘. 这两个棋盘均可被 $p \times q$ 矩形覆盖，结论成立.

必要性.

现设 $m \times n$ 棋盘存在 $p \times q$ 矩形的完全覆盖，从而 $m \times n$ 棋盘存在 $1 \times p$ 矩形的完全覆盖. 由定理 1，$p \mid m$ 或 $p \mid n$. 同理，$q \mid m$ 或 $q \mid n$. 这有以下两种情况：

(1)p,q 可分别整除 m,n 中的各一个，即有 $p\mid x, q\mid y$，其中 $\{x,y\}=\{m,n\}$，则结论显然成立.

(2)p,q 只能同时整除 m,n 中的同一个. 不妨设 $p\mid m, q\mid m$，且 $p\nmid n, q\nmid n$. 考察至少盖住第一行中一个格的那些覆盖形，设其中以"$p\times q$"的方式覆盖的矩形有 b 块，以"$q\times p$"的方式覆盖的矩形有 a 块. 再注意到第一行共有 n 个格，所以 $n=ap+bq$，结论成立.

综上所述，定理获证.

$m\times n$ 棋盘的 $p\times q$ 矩形完全覆盖是棋盘覆盖中最简单的一种情形. 稍复杂一些的覆盖是所谓棋盘的"$k-L$ 形"完全覆盖.

定义 3 由 k 个方格组成的形如图 3 所示的图形称为 $k-L$ 形，记为 $L(AB)$. 其中线段 AB 称为 $k-L$ 形的底线，线段 AF 称为 $k-L$ 形的顶线. 以顶线为边界的两个方格称为顶格，其余的 $k-2$ 个方格称为底格. 仅与顶格相邻的顶格叫做外顶格，另一个顶格叫做内顶格.

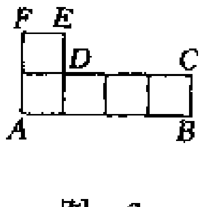


图 3

定义 4 在棋盘的 $k-L$ 形覆盖中，若某个 $k-L$ 形的底线是横(纵)向的，则称此 $k-L$ 形在覆盖中是横(纵)向覆盖的，并称此 $k-L$ 形所覆盖的方格是被横(纵)向覆盖的.

1982 年，薛通和王元元共同解决了棋盘的 $3-L$ 形，$4-L$ 形完全覆盖问题(见《数学的实践与认识》，1987 年第 4 期，p.35)，但他们给出的证明相当复杂. 后来，笔者得到了这两个定理的简单证明，今介绍如下：

定理 3 $m\times n$ 棋盘不存在"$3-L$ 形"的完全覆盖的充分必要条件是：要么 $3\nmid mn$，要么 m,n 中一个为 3，另一个为奇数.

证：充分性.

首先，$3 \nmid mn$ 时，$m \times n$ 棋盘显然不存在“3 - L 形”的完全覆盖，结论成立. 其次，考察 $3\times(2n-1)$ 棋盘. 当 $n=1$ 时，3×1 棋盘显然不存在“3 - L 形”的完全覆盖，结论成立；当 $n>1$ 时，反设 $3\times(2n-1)$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖. 如图 4，将 $3\times(2n-1)$ 棋盘的各个格用 1，2，3，…编号，并用 (i,j,k) 表示编号为 i,j,k 的三个格被同一块 3 - L 形盖住.

1	6	7	……
2	5	8	……
3	4	9	……

图 4

考察 $3\times(2n-1)$ 棋盘前两列的格在覆盖中的所有可能覆盖方式. 它们可用下述树图表示：

$$(1)\to(1,6)\to(1,6,2) \quad ①$$

$$(1)\to(1,6)\to(1,6,5) \quad ②$$

$$(1)\to(1,2)\to(1,2,5) \quad ③$$

考察其中编号为 3 的格的覆盖. 对于情形③，格(3)无法覆盖，因而这种情形不可能出现；对于情形①，则必出现(3，4，5)；对于情形②，则必出现(2，3，4). 所以，不论出现那种情形，当 $3\times(2n-1)$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖时，$3\times(2n-3)$ 棋盘亦存在“3 - L 形”的完全覆盖. 如此下去，有 3×1 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖，矛盾.

必要性.

首先，3×2 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖，从而 $3\times2n$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖.

其次，我们证明：当 $3\mid mn$，且 m,n 都不为 3 时，$m\times n$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖.

实际上，由 $3\mid mn$，有 $3\mid m$，或 $3\mid n$. 不妨设 $n=3k(k>1)$.

有以下几种情形：

(1)当 $m=2t$ 时，$2t\times 3k$ 棋盘可划分为 kt 个 2×3 矩形，所以存在“3 - L 形”的完全覆盖.

(2)当 $m=5$ 时，若 $k=2p(p\in N)$，则 $n=6p$. 此时，$5\times 6p$ 棋盘可划分为 p 个 5×6 矩形；

若 $k=2p+1(p\in N)$，则 $n=6p+3=6(p-1)+9$. 此时，$5\times(6p+3)$ 棋盘可划分为 $p-1$ 个 5×6 矩形和一个 5×9 矩形. 由图 5 和图 6 可知，5×6 矩形和 5×9 矩形都存在“3 - L 形”的完全覆盖. 从而 $m\times n$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖.

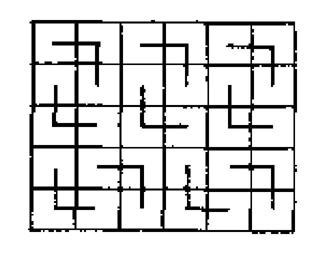


图 5

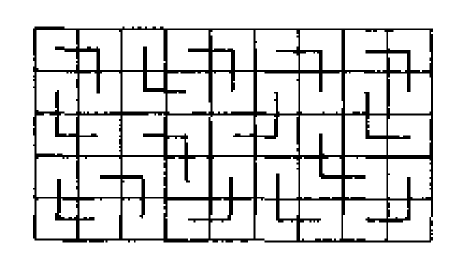


图 6

(3)当 $m=2t+1(t>2)$ 时，$m=2(t-2)+5$. 此时，$m\times 3k$ 棋盘可划分为一个 $5\times 3k$ 矩形和一个 $2(t-2)\times 3k$ 矩形. 由前面的(1),(2)两种情形知，$m\times n$ 棋盘存在“3 - L 形”的完全覆盖. 定理 3 获证.

定理 4 $m\times n$ 棋盘存在“4 - L 形”的完全覆盖的充分必要条件是：$8\mid mn$，且 $m,n>1$.

证：充分性.

若 $4\mid m$，$2\mid n$，则令 $m=4k$，$n=2t$. 此时，$m\times n$ 棋盘可划分为 kt 个 4×2 矩形，所以存在“4 - L 形”的完全覆盖.

若 $8\mid m$，则有以下两种情况：

(1)n 为偶数. 此时由上知，结论成立；

(2) n 为奇数. 令 $n=2t+1(t\in N)$, 则 $n=2(t-1)+3$. 此时, $m\times n=8k\times n=8k\times 2(t-1)+8k\times 3$, 所以 $m\times n$ 棋盘可划分为 $k(t-1)$ 个 8×2 矩形和 k 个 8×3 矩形. 显然, 8×2 矩形存在"$4-L$ 形"的完全覆盖. 又如图 7, 8×3 矩形存在"$4-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$4-L$ 形"的完全覆盖.

必要性.

首先, 当 m 或 $n=1$ 时, $m\times n$ 棋盘显然不存在"$4-L$ 形"的完全覆盖.

其次, 若 $m\times n$ 矩形存在"$4-L$ 形"的完全覆盖, 则必有 $4\mid mn$, 从而 m,n 中必有一个偶数. 将 $m\times n$ 棋盘的各个格用 $1,-1$ 编号(图 8), 使任何两个相邻(有公共边)的格不同号, 则棋盘中 1 与 -1 的个数相等. 显然, 每个"$4-L$ 形"盖住的 4 个格编号之和为 2 或 -2. 注意到棋盘中所有格的编号之和为 0, 从而覆盖中, 其"和"为 2 与其"和"为 -2 的"$4-L$ 形"的个数相等. 于是共有偶数个"$4-L$ 形", 即 $8\mid mn$. 定理 4 获证.

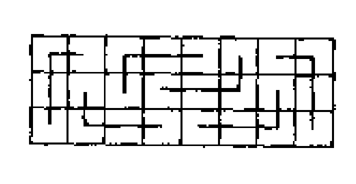


图 7

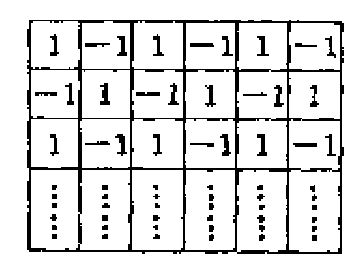


图 8

对一般的自然数 k, $m\times n$ 棋盘的"$k-L$ 形"完全覆盖问题至今还没有彻底解决. 1996 年, 我们解决了 k 为质数时的"$k-L$ 形"覆盖问题. 先看 $k=5$ 的情形. 为此, 我们先证明如下的两个引理:

引理 1 当 m 为奇数时, 若 $m\times n$ 棋盘 M 存在"$k-L$

形”完全覆盖，则 M 的第一列格中必有被纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖的.

证：首先证明，$m\times n$ 棋盘的第一列格中必有被纵向覆盖的.实际上，反设 M 在覆盖中第一列格都是横向覆盖的.若存在一个格 a_{i1}，它被某个“$k-L$ 形”$L(AB)$的底格所覆盖(图9)，那么，第一列中与 $L(AB)$的外顶格在同一行的那个格不能被横向覆盖，矛盾.于是，第一列的所有格都被一些横向“$k-L$ 形”的顶格所覆盖.但每个“$k-L$ 形”都有 2 个顶格，当一个横向“$k-L$ 形”有一个顶格覆盖第一列中的格时，它的另一个顶格也覆盖第一列中的格.于是，这些横向“$k-L$ 形”共盖住第一列的偶数个格.但 $m\times n$ 棋盘的第一列有 m(奇数)个格，矛盾.于是第一列中必有被纵向覆盖的格，设 a_{i1}是这样的一个格.若 a_{i1}被纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖，则结论成立；若 a_{i1}被纵向“$k-L$ 形”的顶格覆盖，则 $a_{i-1,1}$或 $a_{i+1,1}$必被另一个纵向“$k-L$ 形”的底格覆盖，结论成立.引理 1 获证.

引理 2　对任何奇数 k 和自然数 n，$k\times(2n-1)$棋盘不存在“$k-L$ 形”完全覆盖.

证：反设 $k\times(2n-1)$棋盘 M 存在“$k-L$ 形”完全覆盖.由引理 1，在覆盖中 M 的第一列必有一个格是被某个纵向 $k-L$ 形的底格覆盖的.显然，此“$k-L$ 形”在第一列中的覆盖方式本质上只有两种：一是外顶格在边界上，二是外顶格不在边界上(见图 10 和图 11).

对于第一种情形，考察格 a_{12}的覆盖，它只能被横向覆盖.这样，a_{22}无法覆盖，矛盾.对于第二种情形，考察格 a_{11}的覆盖.若它被横向覆盖.则 a_{22}无法覆盖，矛盾.于是，格 a_{12}只能被纵向覆盖.这样，$k\times(2n-3)$棋盘存在“$k-L$ 形”的完全覆盖.如此下去，$k\times1$ 棋盘存在“$k-L$ 形”的完全覆盖，矛盾.

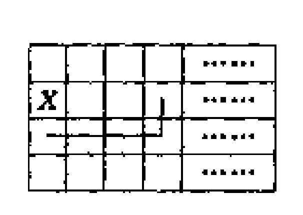


图 9

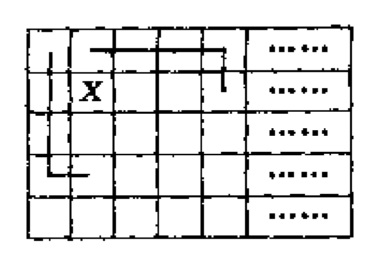


图 10

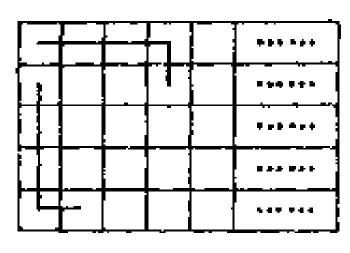


图 11

定理 5 $m\times n$ 棋盘不存在“5－L 形”的完全覆盖的充分必要条件是：m,n 满足下列 3 个条件之一：

(ⅰ)$5\nmid mn$；

(ⅱ)m,n 中有一个为小于 5 的奇数；

(ⅲ)m,n 中一个为 5，另一个为奇数.

证：充分性.

(ⅰ)$5\nmid mn$ 时，$m\times n$ 棋盘显然不存在“5－L 形”的完全覆盖，结论成立.

(ⅱ)反设 $m\times n$ 棋盘 M 存在“5－L 形”的完全覆盖.不妨设 m 是小于 5 的奇数，则 $m\leqslant 3$. 由引理 1，M 的第一列至少有一个格是被纵向覆盖的，这与 $m\leqslant 3$ 矛盾.

(ⅲ)直接利用引理 2，结论成立.

必要性.

首先，$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 5×2 矩形，从而存在“5－L 形”的完全覆盖.

其次，设 $5\mid mn$，且 m,n 都不等于 5 和 3. 此时，$5\mid m$ 或 $5\mid n$. 不妨设 $5\mid n$，令 $n=5k(k>1)$.

(1)当 $m=2s$ 时，$m\times n=2s\times 5k$. 此时 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 5×2 矩形，从而存在“5－L 形”的完全覆盖.

(2)当 $m=7$ 时，若 $k=2t$，则 $m\times n=7\times 5k=7\times 10t$. 此时 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 7×10 矩形. 由图 12 可

知，7×10 矩形可以划分为若干个 5×2 矩形，即存在"$5-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

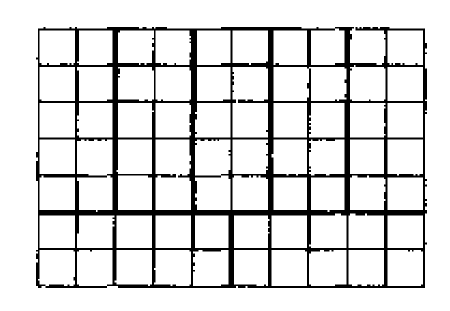


图 12

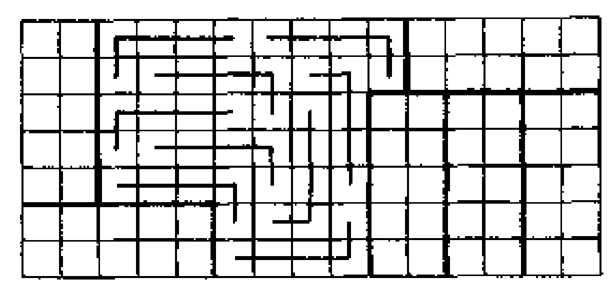


图 13

若 $k=2t+1$，则 $m\times n=7\times5k=7\times5(2t+1)=7\times(10t+5)=7\times[10(t-1)+15]=7\times10(t-1)+7\times15$. 由图 13 可知，$7\times15$ 矩形存在"$5-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

(3)当 $m=2r+1(r>3)$时，$m\times n=(2r+1)\times5k=[2(r-3)+7]\times5k=2(r-3)\times5k+7\times5k$. 注意到 $k>1$，于是，k 为偶数时，$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 2×5 矩形和若干个 7×10矩形，所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖；当 k 为奇数时，$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 2×5 矩形，若干个 7×10 矩形和一个 7×15 矩形，所以 $m\times n$ 棋盘存在"$5-L$ 形"的完全覆盖.

综上所述，定理 5 获证.

为了讨论棋盘的"$k-L$ 形"覆盖问题，我们还需要证明如下引理：

引理 3 对任何奇数 k，$(k+2)\times3k$ 棋盘存在"$k-L$ 形"的完全覆盖.

证：如图 14，在 $(k+2)\times3k$ 棋盘的左上角分割出一个 k

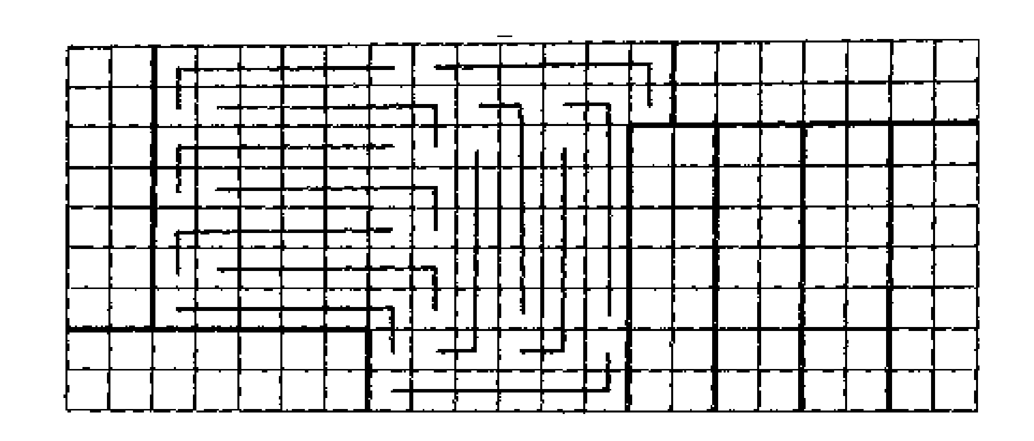


图 14

$\times 2$ 矩形，再在左下角分割出一个 $2\times k$ 矩形，在右下角分割出一个 $(k+1)\times k$ 矩形，在右上角分割出一个 $2\times k$ 矩形. 再将下述各组格分别用一个"$k-L$ 形"盖住：$(a_{k+2,k+1}, a_{k+2,k+2}, \cdots, a_{k+2,2k-1}, a_{k+1,2k-1})$，$(a_{k-2,3}, a_{k-2,4}, \cdots, a_{k-2,k+1}, a_{k-1,k+1})$，$(a_{1,k+2}, a_{1,k+3}, \cdots, a_{1,2k}, a_{2,2k})$，$A=(a_{2,3}, a_{1,3}, a_{1,4}, \cdots, a_{1,k+1})$，$B=(a_{2,4}, a_{2,5}, \cdots, a_{2,k+2}, a_{3,k+2})$，$C=(a_{2,2k-2}, a_{2,2k-1}, a_{3,2k-1}, \cdots, a_{k,2k-1})$，$D=(a_{3,2k-2}, a_{4,2k-2}, \cdots, a_{k+1,2k-2}, a_{k+1,2k-3})$. 最后，将位于第 3 行到第 $k-1$ 行且在第 3 列到 $k+2$ 列的格从上至下依次按 A, B 的方式覆盖，将位于第 2 行到第 $k+1$ 行且在第 $k+3$ 列到 $2k-3$ 列的格从右至左依次按 C, D 的方式覆盖即可. 引理 3 获证.

定理 6 对一切奇质数 p，$m\times n$ 棋盘不存在"$p-L$ 形"的完全覆盖的充分必要条件是 m, n 满足下列 3 个条件之一：

(ⅰ) $p\nmid mn$；

(ⅱ) m, n 中有一个为小于 p 的奇数；

(ⅲ) m, n 中一个为 p，另一个为奇数.

证：充分性.

（i）$p \nmid mn$ 时，$m\times n$ 棋盘显然不存在"$p-L$ 形"的完全覆盖，结论成立.

（ii）反设 $m\times n$ 棋盘 M 存在"$p-L$ 形"的完全覆盖，不妨设 m 是小于 p 的奇数，则 $m\leqslant p-2$. 由引理 1，M 在覆盖中第一列至少有一个格是被纵向覆盖的，这与 $m\leqslant p-2$ 矛盾.

（iii）直接利用引理 2，结论成立.

必要性.

首先，$p\times 2n$ 棋盘可以划分为若干个 $p\times 2$ 矩形，从而存在"$p-L$ 形"的完全覆盖.

其次，设 $p\mid mn$，且 m,n 都不属于 $X=\{x\mid x\leqslant p$ 且 x 为奇数$\}$. 此时，由于 p 为质数，所以 $p\mid m$ 或 $p\mid n$. 不妨设 $p\mid n$，令 $n=qp(q>1)$.

（1）当 $m=2s$ 时，$m\times n=2s\times qp$，从而 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 $p\times 2$ 矩形，从而存在"$p-L$ 形"的完全覆盖.

（2）当 $m=p+2$ 时，若 $q=2t$，则 $m\times n=(p+2)\times qp=(p+2)\times 2tp$，从而 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 $(p+2)\times 2p$ 矩形. 注意到 $(p+2)\times 2p=p\times 2p+2\times 2p$，$(p+2)\times 2p$ 矩形可以划分为若干个 $p\times 2$ 矩形，从而存在"$p-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$p-L$ 形"的完全覆盖.

若 $q=2t+1$，则 $m\times n=(p+2)\times qp=(p+2)\times(2t+1)p=(p+2)\times(2pt+p)=(p+2)\times[2p(t-1)+3p]=(p+2)\times 2p(t-1)+(p+2)\times 3p$. 所以 $m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 $(p+2)\times 2p$ 矩形和一个 $(p+2)\times 3p$ 矩形. 由引理 3 可知，$(p+2)\times 3p$ 矩形存在"$p-L$ 形"的完全覆盖. 所以 $m\times n$ 棋盘存在"$p-L$ 形"的完全覆盖.

（3）当 $m=2r+1$，$r>\frac{p+1}{2}$ 时，$m\times n=(2r+1)\times qp=$

$\left[2\left(r-\frac{p+1}{2}\right)+(p+2)\right]\times qp=2\left(r-\frac{p+1}{2}\right)\times qp+(p+2)$ $\times qp$. 注意到 $q>1$，于是，q 为偶数时，$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 $2\times p$ 矩形和若干个 $(p+2)\times 2p$ 矩形，所以 $m\times n$ 棋盘存在"$p-L$ 形"的完全覆盖；当 q 为奇数时，$m\times n$ 棋盘可以划分为若干个 $2\times p$ 矩形，若干个 $(p+2)\times 2p$ 矩形和一个 $(p+2)\times 3p$ 矩形，所以 $m\times n$ 棋盘存在"$p-L$ 形"的完全覆盖.

由以上一些结果，我们不无理由地提出如下猜想：

猜想 当 k 为奇数时，$m\times n$ 棋盘不存在"$k-L$ 形"的完全覆盖的充分必要条件是：m，n 满足下列 3 个条件之一：

(i) $k\nmid mn$；

(ii) m，n 中有一个为小于 k 的奇数；

(iii) m，n 中一个为 k，另一个为奇数.

这个猜想至今没有被证明或否定. 此外，当 k 为偶数时，棋盘的 $k-L$ 形覆盖问题还是悬而未决的.

在棋盘的同形覆盖中，有一种非常有趣的覆盖，我们称之为均匀覆盖.

定义 5 用某种覆盖形覆盖 $m\times n$ 棋盘，覆盖形可以重叠，但不能超出边界. 如果存在一种覆盖，使棋盘的每个方格被覆盖的层数都是 r，则称此覆盖是棋盘的该覆盖形的 $r-$层均匀覆盖. 简称均匀覆盖.

显然，完全覆盖是 1－层的均匀覆盖. 对所有覆盖形都可研究相应的均匀覆盖，这里只介绍棋盘的 $3-L$ 形均匀覆盖的一个结果. 首先证明如下命题：

命题 1 5×7 棋盘不存在 $3-L$ 形的均匀覆盖.

证：将 5×7 棋盘的位于奇数行且在奇数列的 12 个格染

黑色，其余方格染白色．每个黑色方格都填一个数 -2，每个白色方格都填一个数 1．假如 5×7 棋盘存在 $3-L$ 形的 $r-$层均匀覆盖，则任何一个 $3-L$ 形要么盖住 3 个白格，要么盖住一个黑格和 2 个白格．所以每个 $3-L$ 形盖住的 3 个数的和非负．考察所有 $3-L$ 形覆盖的 3 个数的总和 S．一方面，每个 $3-L$ 形覆盖的 3 个数的和非负，所以 S 非负．另一方面，每个格被覆盖了 r 层，每个方格中的数在 S 中计算了 r 次，所以 $S=r(-2\times12+1\times23)=-r<0$，矛盾．命题 1 获证．

命题 2　5×5 棋盘不存在 $3-L$ 形的均匀覆盖．

命题 3　$3\times(2n+1)$棋盘不存在 $3-L$ 形的均匀覆盖．

以上两个命题可类似获证，留给读者完成．

定理 7　$m\times n(m,n>1)$棋盘不存在 $3-L$ 形的均匀覆盖的充要条件为 m,n 满足下列条件之一：

(1)$\{m,n\}=\{5,7\}$；

(2)$m=n=5$；

(3)m,n 中一个为 3，另一个为奇数．

证：充分性由命题 1,2,3 直接给出．下证必要性．不妨设 $m\leqslant n$．

当 $m=2$ 时，$2\times n$ 棋盘存在 $3-L$ 形的均匀覆盖．实际上，若 $n=2$，则 2×2 棋盘存在 $3-L$ 形的 $3-$层均匀覆盖；若 $3\mid n$，则由定理 3，$2\times n$ 棋盘存在 $3-L$ 形的 $1-$层均匀覆盖．若 $n=3k+1(k\geqslant1)$，则 $n=3(k-1)+4$，$m\times n$ 棋盘可以分割为两个 2×2 棋盘和一个 $2\times3(k-1)$棋盘．而 2×2 棋盘可 $3-$层 $3-L$ 形均匀覆盖，$2\times3(k-1)$棋盘可 $1-$层 $3-L$ 形均匀覆盖，当然可 $3-$层 $3-L$ 形均匀覆盖，所以 $2\times n$ 棋盘可 $3-$层 $3-L$ 形均匀覆盖；若 $n=3k+2(k\geqslant1)$，则 $2\times n$ 棋盘可以分割为一个 2×2 棋盘和一个 $2\times3k$ 棋盘，结论同样成

立.

当 $m=3$ 时,因为 m,n 不满足(3),所以 n 为偶数.由定理 3,结论成立.

当 $m=3t(t\geqslant 2)$ 时,$3\mid mn$ 且 $n>3$.由定理 3,结论成立.

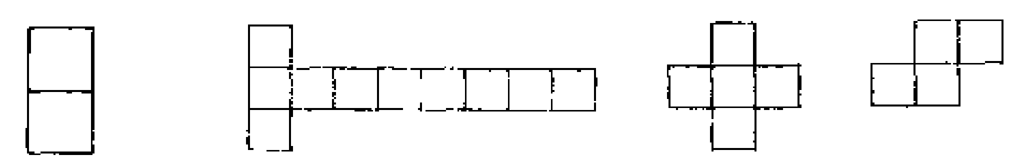
当 $m=3t+1(t\geqslant 1)$ 时,$n>3$.注意到 $m=3(t-1)+4$,所以 $m\times n$ 棋盘可以分割为两个 $2\times n$ 棋盘和一个 $3(t-1)\times n$ 棋盘.由上面讨论可知,存在 r,使 $2\times n$ 棋盘可 r - 层 3 - L 均匀形覆盖,而 $3(t-1)\times n$ 棋盘可 1 - 层 3 - L 形均匀覆盖,当然可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖,所以 $m\times n$ 棋盘可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖.

当 $m=3t+2(t\geqslant 1)$ 时,若 $t=1$,即 $m=5$,则因 m,n 不满足(1)和(2),所以 $n>7$.若 n 为偶数,则 $5\times n$ 棋盘可以分割为若干个 5×2 棋盘.由上面讨论可知,每个 5×2 棋盘,都可 3 - 层 3 - L 均匀形覆盖,从而 $5\times n$ 棋盘可 3 - 层 3 - L 形均匀覆盖.若 n 为奇数,则 $n\geqslant 9$.注意到 $n=9+2t$,所以 $5\times n$ 棋盘可以分割为一个 5×9 棋盘和一个 $5\times 2t$ 棋盘.由上面讨论可知,存在 r,使 $5\times 2t$ 棋盘可 r - 层 3 - L 均匀形覆盖.而由定理 3,5×9 棋盘可 1 - 层 3 - L 形均匀覆盖,当然可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖,所以 $5\times n$ 棋盘可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖.若 $t>1$,则 $m\times n$ 棋盘可以分割为一个 $3t\times n(t\geqslant 2)$ 棋盘和一个 $2\times n$ 棋盘.由上面讨论可知,存在 r,使 $2\times n$ 棋盘可 r - 层 3 - L 均匀形覆盖.面由定理 3,$3t\times n(t\geqslant 2)$ 棋盘可 1 - 层 3 - L 形均匀覆盖,当然可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖,所以 $m\times n$ 棋盘可 r - 层 3 - L 形均匀覆盖.

综上所述,定理 7 获证.

下面讨论 $m\times n$ 棋盘的异形完全覆盖.为叙述问题方便,我们把下述一些图形分别称为"1×2 骨牌","$r-T$ 形","十

字形”,“4 - Z 形”:



1×2 骨牌　　$r-T$ 形(共 r 个方格)　　十字形　　$4-Z$ 形

定理 8　给定自然数 $k>1$, $m\times n$ 棋盘可用一个 1×1 正方形和若干个 $1\times k$ 矩形覆盖的充要条件是:或者 $m\equiv n\equiv1\pmod{k}$,或者 $m\equiv n\equiv-1\pmod{k}$,且 $m,n\geqslant2k-1$.

证:为了叙述问题方便,若 $m\times n$ 棋盘可用一个 1×1 和若干个 $1\times k$ 矩形覆盖,则称 $m\times n$ 棋盘可以覆盖.

充分性.首先,$m\times n$ 棋盘可以覆盖,所以 $k\mid mn-1$.此外,将棋盘的每一行染一种颜色,共染 k 种颜色.设第 $i(i=1,2,\cdots,k)$ 行的颜色为 i.此外,对任何 $j(1\leqslant j\leqslant m-k)$,第 j 行与第 $j+k$ 行同色.则 $1\times k$ 矩形覆盖某种颜色的格的数目为 0,1,或 k,且任何一个 $1\times k$ 矩形覆盖的各种颜色的格的数目关于模 k 同余.记所有 $1\times k$ 矩形覆盖第 i 种颜色的格的个数为 S_i,则 $S_1\equiv S_2\equiv\cdots\equiv S_k\pmod{k}$.

设 $m=ak+b$,因为 $k\mid mn-1$,所以 $k\nmid b$,所以 $b\neq0$,所以 $1<b<k$.于是第 $b+1$ 色格比第 b 色格少一行.由此可知,1×1 矩形覆盖的必是 b 色或 $b+1$ 色的格.否则,$S_{b+1}=S_b-n$,有 $k\mid n$,与 $k\mid mn-1$ 矛盾.

若 1×1 矩形覆盖的是 b 色格,则 $b=1$,否则,$b>1$,有 $k\mid S_{b-1}-S_{b+1}=n$,矛盾.所以,$m=ak+1\equiv1\pmod{k}$.

若 1×1 矩形覆盖的是 $b+1$ 色格,则 $b=k-1$.否则,有 $b\leqslant k-2$,于是 $k\mid S_b-S_{b+2}=n$,矛盾.所以 $m=ak+(k-1)\equiv-1\pmod{k}$.

综上所述,$m\equiv\pm1\pmod{k}$.同理 $n\equiv\pm1\pmod{k}$.注意到

$k \mid mn-1$，有 $mn \equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$，所以 $m \equiv n \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, k)$.

若 $m \equiv n \equiv -1(\mathrm{mod}\, k)$，则有 $m, n > k-1$. 否则，不妨设 $m = k-1$，那么覆盖中 $1 \times k$ 矩形覆盖的方式都是横向的. 考察 1×1 正方形所在的那一行，设有 r 个 $1 \times k$ 矩形，则该行的格的个数为 $n = rk+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$，矛盾. 所以 $m, n > k-1$，于是 $m, n \geqslant 2k-1$.

必要性.

当 $m \equiv n \equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$时，按图 15 所示方式，$m \times n$ 棋盘可以覆盖.

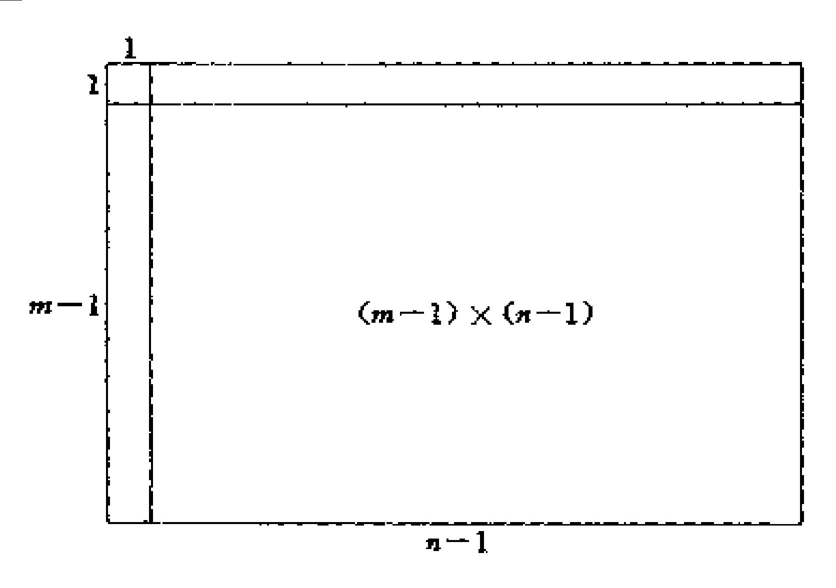


图　15

当 $m \equiv n \equiv -1(\mathrm{mod}\, k)$时，按图 16 所示方式，$m \times n$ 棋盘可以覆盖.

棋盘的异形覆盖有非常丰富的内容，即使是棋盘的矩形的异形覆盖，由于矩形可以有各种不同的规格，其研究内容也是相当广泛的. 对此，我们只举几个例子.

例 1　用 15 块 1×4 矩形和 1 块 2×2 矩形不能完全覆盖 8×8 棋盘.

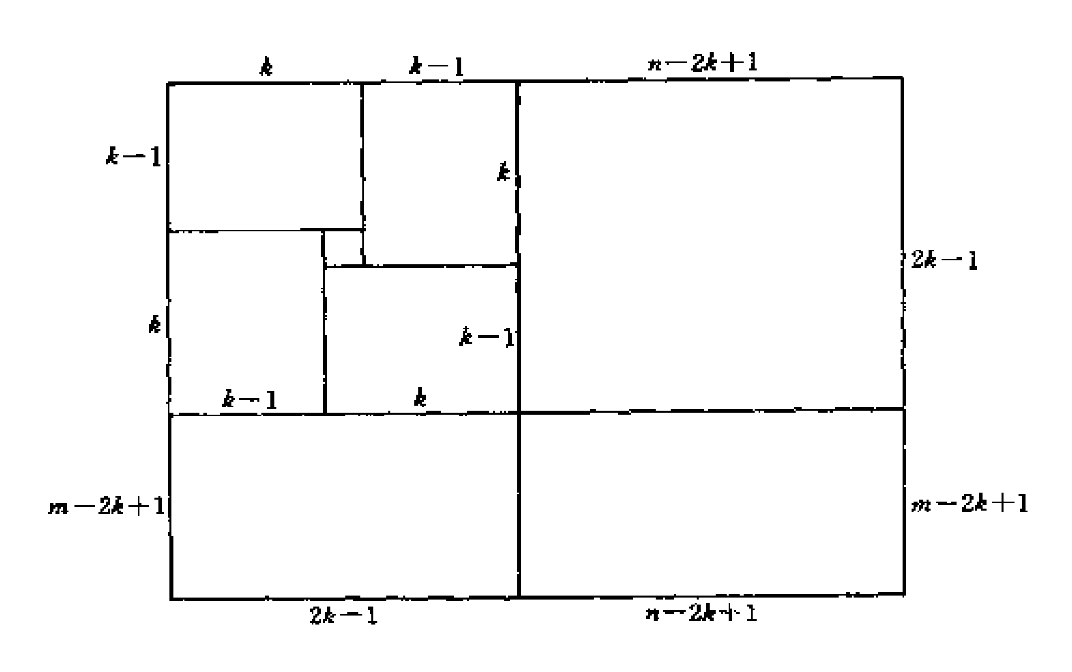


图 16

我们用三种方法给出证明.

证法 1:如图 17,将棋盘的 32 个格染黑色(图中的阴影部分),其余的格染白色.则对于任何一个 1×4 矩形,恰覆盖两个黑格和两个白格.而对于 2×2 矩形,要么覆盖 1 黑 3 白,要么覆盖 1 白 3 黑,从而覆盖中盖住的黑格数和白格数不相等,矛盾.

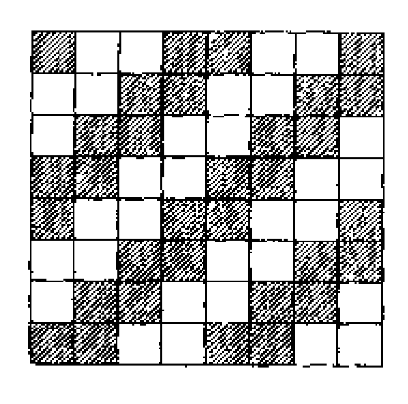


图 17

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

图 18

证法 2:如图 18,按对角线将棋盘的各个格依次编号为 1,

2,3,4. 对于任何一个 1×4 矩形,恰覆盖各类格各一个. 而对于 2×2 矩形,盖住的各类格的数目不相等,矛盾.

证法 3:如图 19,按行将棋盘的各个格依次编号为 1,2,3,4. 对于任何一个 1×4 矩形,恰覆盖各类格的数目关于模 4 同余(各类格都是 1 个,或一类格 4 个另三类格都是 0 个). 而对于 2×2 矩形,盖住的各类格的数目关于模 4 不同余,但棋盘中各类格的总数目关于模 4 同余,矛盾.

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4

图 19

例 2 存在实数 L,使对任何大于 L 的整数 m,n,$m\times n$ 棋盘都能用若干个 4×6 矩形和若干个 5×7 矩形完全覆盖.

证:我们先证明如下的事实:如 a,b 为自然数,则存在实数 L_0,使任何比 L_0 大的 (a,b) 的倍数都可表示成 $ra+sb$ 的形式,其中 r,s 是非负整数.

实际上,先假定 $(a,b)=1$,则 $a,2a,\cdots,ba$ 是模 b 的完系. 于是对于大于 $L_0=ab$ 的整数 k,都存在 $j\in\{1,2,\cdots,b\}$,使 $k\equiv ja\pmod b$. 由于 $k>ba\geqslant ja$,所以,$k=ja+ib$($i\geqslant0$, $j\in N$).

一般地,$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$,由上可知,存在 L_0,使对任何大于 L_0 的整数 k,都有 $k=\frac{sb}{(a,b)}+\frac{ra}{(a,b)}$,所以,$k(a,b)=ra+sb$.

返回原题. 为叙述问题方便,称 $m\times n$ 棋盘能用若干个 4×6 矩形和若干个 5×7 矩形完全覆盖为"可覆盖". 首先,20×6,20×7 棋盘可覆盖. 由于 $(6,7)=1$,于是存在 L_1,当 $p>L_1$ 时,$20\times p$ 棋盘可覆盖.

其次,35×5,35×7 棋盘可覆盖. 由于$(5,7)=1$,于是存在 L_2,当 $q>L_2$ 时,$35\times q$ 棋盘可覆盖.

最后,42×4,42×5 棋盘可覆盖. 由于$(4,5)=1$,于是存在 L_3,当 $t>L_3$ 时,$42\times t$ 棋盘可覆盖.

取 $L_4=\max\{L_1,L_2,L_3\}$,则当 $n>L_4$ 时,$20\times n$,$35\times n$,$42\times n$ 棋盘都可覆盖. 注意到$(20,35)=5$,由前面所证结论,存在 L_5,使 $k>L_5$ 时,$5k=20s+35r$. 选取其中一个大于 L_4 的 k,使$(5k,42)=1$(比如,取 k 为大于 42 的质数),由于 $5k\times n$,$42\times n$ 棋盘都可覆盖,于是存在 L_6,当 $m>L_6$ 时,$m\times n$ 棋盘可覆盖. 取 $L=\max\{L_4,L_5,L_6\}$,则对任何大于 L 的整数 m,n,$m\times n$ 棋盘都可覆盖. 证毕.

例 3 将 99×99 棋盘用 $3-L$ 形,2×2 矩形,$4-Z$ 形这三种图形完全覆盖,且其中任何一种图形至少使用一次,求覆盖中 $3-L$ 形个数的最小值.

解:我们证明如下更一般的结论:

$(2n-1)\times(2n-1)$棋盘可用 $3-L$ 形,2×2 矩形,$4-Z$ 形这三种图形完全覆盖,其中任一种图形至少使用一次的充要条件是:$n\geqslant5$,且覆盖中 $3-L$ 形个数的最小值是 $4n-1$.

证:设覆盖中 $3-L$ 形的个数为 a,2×2 矩形和 $4-Z$ 形共有 b 个,则 $3a+4b=(2n-1)^2$.

将$(2n-1)\times(2n-1)$棋盘中位于奇数行且位于奇数列的所有格染红色,则任何一个覆盖形至多盖住一个红格. 但棋盘中共有 n^2 个红格,所以 $a+b\geqslant n^2$. 将 $b=\dfrac{(2n-1)^2-3a}{4}$ 代入此不等式,解得 $a\geqslant4n-1$.

于是,棋盘中至少有 $3(4n-1)+4+4=12n+5$ 个格,即 $(2n-1)^2>12n+5$,所以 $n\geqslant5$.

当 $n \geqslant 5$ 时,我们证明$(2n-1)\times(2n-1)$棋盘可用 $3-L$ 形,2×2 矩形,$4-Z$ 形这三种图形完全覆盖,其中任一种图形至少使用一次,且覆盖中 $3-L$ 形个数为 $4n-1$.

当 $n=5$ 时,如图 20,结论成立.

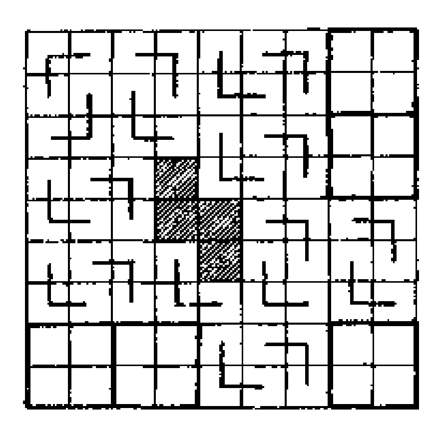


图 20

设结论对不大于 n 的自然数成立,考察$(2n+1)\times(2n+1)$棋盘$(n>4)$.由归纳假设,可先将棋盘中左上角的一个$(2n-1)\times(2n-1)$矩形用 $3-L$ 形,2×2 矩形,$4-Z$ 形这三种图形完全覆盖,使其中任一种图形至少使用一次,且覆盖中 $3-L$ 形个数为 $4n-1$.然后将右下角分割出一个 2×2 矩形,再将最后两行剩下的格分割为 $n-2$ 个 2×2 矩形和一个 2×3 矩形,将最后两列剩下的格分割为 $n-2$ 个 2×2 矩形和一个 2×3 矩形.每个 2×3 矩形分别用两个 $3-L$ 形覆盖,则$(2n+1)\times(2n+1)$棋盘被一些 $3-L$ 形,2×2 矩形,$4-Z$ 形这三种图形完全覆盖,其中任一种图形至少使用一次,且覆盖中 $3-L$ 形个数为$(4n-1)+4=4(n+1)-1$.证毕.

比异形覆盖更严格的一种覆盖是所谓的残缺棋盘的覆盖.所谓残缺棋盘,是由 $m\times n$ 棋盘去掉若干个格后得到的一种棋盘.最简单的一种残缺棋盘是由 $m\times n$ 棋盘去掉一个方格后得到的棋盘,我们称之为 $m\times n-1$ 棋盘.

残缺棋盘的覆盖,本质上是一种异形覆盖,其中去掉的若干个格可以看作是用事先给定的某些覆盖形盖住了这些格.残缺棋盘的覆盖是一个较难的研究课题,有很多问题可以研究.这里,我们仅研究 $m\times n-1$ 棋盘的 $3-L$ 覆盖.先证明如

下的一些引理：

引理 4 对一切自然数 n，去掉任意一个方格的 $4\times(3n+1)-1$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

证：对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，由对称性，只须讨论去掉的格（简称空格）在阴影部分的情形. 由图 21，结论成立.

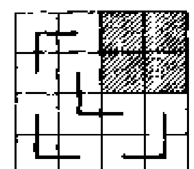


图 21

设结论对小于 n 的自然数成立，考察 $4\times(3n+1)-1$ 棋盘. 由对称性，对任何空格，残缺棋盘可以划分为一个 $4\times[3(n-1)+1]-1$ 棋盘和一个 4×3 棋盘，由归纳假设和定理 3，结论成立.

引理 5 对一切自然数 n，去掉任意一个方格的 $7\times(3n+1)-1$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

证：对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，由引理 4，结论成立.

当 $n=2$ 时，由对称性，只须讨论空格在图 22 所示阴影部分的情形. 将这些情形按图 23，图 24，图 25 分为 3 类，从而结论成立.

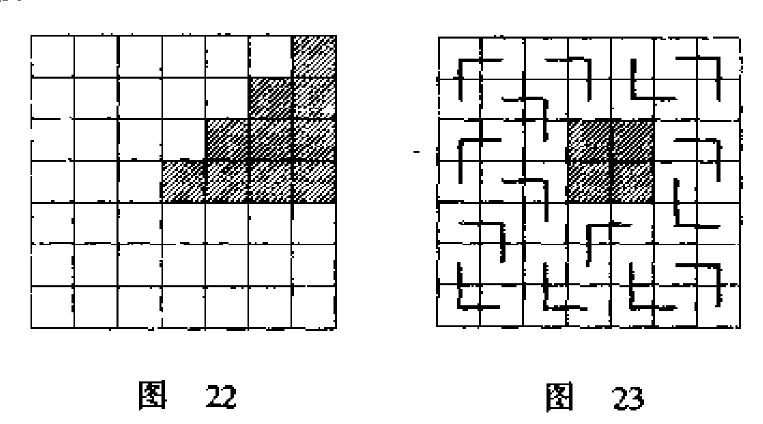


图 22　　　　图 23

当 $n=3$ 时，由对称性，对任何空格，残缺棋盘可以划分为一个 $4\times10-1$ 棋盘和一个 3×10 棋盘，由定理 3 和引理 4，结论成立.

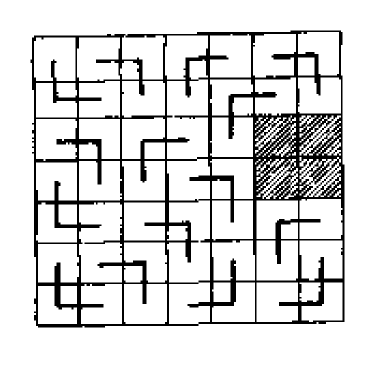


图 24

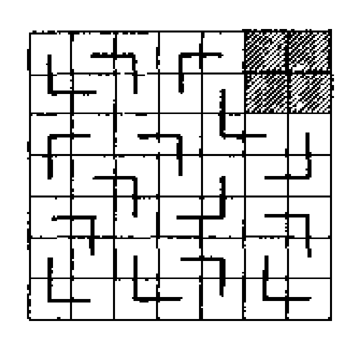


图 25

设结论对小于 n 的自然数成立，考察 $7\times(3n+1)-1$ 棋盘($n\geqslant4$).注意到 $3(n-2)+1>\frac{3n+1}{2}$，于是由对称性，对任何空格，残缺棋盘可以划分为一个 $7\times[3(n-2)+1]-1$ 棋盘和一个 7×6 棋盘.由归纳假设和定理 3，结论成立.

引理 6 对一切自然数 n，去掉任意一个方格的 $10\times(3n+1)-1$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

证：对 n 用数学归纳法.若 $n=1$，由引理 4，结论成立.

设结论对小于 n 的自然数成立.考察 $10\times(3n+1)-1$ 棋盘($n\geqslant2$).由对称性，对任何空格，残缺棋盘可以划分为一个 $10\times[3(n-1)+1]-1$ 棋盘和一个 3×10 棋盘.由归纳假设和定理 3，结论成立.

引理 7 对一切自然数 m,n，去掉任意一个方格的 $(3m+1)\times(3n+1)-1$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

证：对 m 用数学归纳法.当 $m=1$ 时，由引理 4，结论成立.

当 $m=2$ 时，由引理 5，结论成立.

当 $m=3$ 时，由引理 6，结论成立.

设结论对小于 m 的自然数成立，考察 $7\times(3n+1)-1$ 棋盘($m\geqslant4$).注意到 $3(m-2)+1>\frac{3m+1}{2}$，于是由对称性，对

任何空格，残缺棋盘可划分为一个 $6\times(3n+1)-1$ 棋盘和一个 $[3(n-2)+1]\times(3n+1)-1$ 棋盘，由归纳假设和定理 3，结论成立.

引理 8 对一切自然数 $m,n>1$，去掉任意一个方格的 $(3m+2)\times(3n+2)-1$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

证：令 $m=p_1+p_2,n=q_1+q_2(p_1,p_2,q_1,q_2\in N)$，则

$$(3m+2)\times(3n+2)=[3(p_1+p_2)+2]\times[3(q_1+q_2)+2]$$
$$=[(3p_1+1)+(3p_2+1)]\times[(3q_1+1)+(3q_2+1)],$$

所以 $(3m+2)\times(3n+2)$ 棋盘可以划分为 $(3p_1+1)\times(3q_1+1)$，$(3p_1+1)\times(3q_2+1)$，$(3p_2+1)\times(3q_1+1)$，$(3p_2+1)\times(3q_2+1)$ 这四个棋盘（如图 26）. 不妨设空格在 $(3p_1+1)\times(3q_1+1)$ 棋盘中，则按图 26 中阴影方式覆盖一个 $3-L$ 形后，得到四个形如 $(3m+1)\times(3n+1)-1$ 的棋盘. 由引理 7，结论成立.

下述定理 9 由华中师范大学徐高诚给出.

定理 9 对一切自然数 m,n，去掉任意一个方格的 $m\times n-1$ 棋盘都存在 $3-L$ 形的完全覆盖的充要条件是 $m,n\geqslant3,m,n\neq5$，且 $3\mid mn-1$.

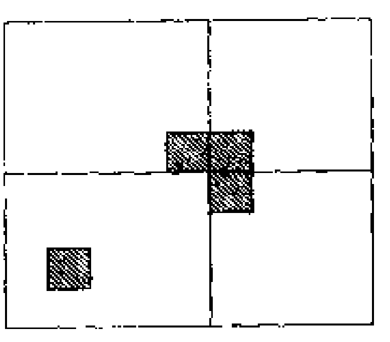


图 26

证：必要性. 当 $3\nmid mn-1$ 时，$m\times n-1$ 棋盘显然不存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

当 m,n 中有一个小于 3 时，不妨设 $m<3$. 若 $m=1$，则 $m\times n-1$ 棋盘显然不存在 $3-L$ 形的完全覆盖. 若 $m=2$，则去掉格 a_{13}，得到的 $2\times n-1$ 棋盘显然不存在 $3-L$ 形的完全覆盖.

当 m,n 中有一个为 5 时，不妨设 $m=5$. 则去掉格 a_{32}，得到的 $5\times n-1$ 棋盘也不存在 3－L 形的完全覆盖. 实际上，格 a_{31}只有 2 种覆盖方式：(a_{31},a_{41},a_{42})，(a_{31},a_{21},a_{22}). 对于前者，格 a_{51}无法覆盖；对于后者，格 a_{11}无法覆盖.

充分性. 由 $3\mid mn-1$，知 $3\nmid m$，$3\nmid n$，且 $m\equiv n\equiv 1$ 或 2 (mod3).

当 $m\equiv n\equiv 1(\text{mod}3)$时，由引理 7，结论成立；当 $m\equiv n\equiv 2$ (mod3)时，由于 $m,n\geqslant 3$，且 $m,n\neq 5$，所以 $m,n\geqslant 8$. 由引理 8，结论成立. 定理 9 获证.

定理 10 设 m,n 为奇数，在 $m\times n$ 棋盘中去掉一个格，使剩下的残缺棋盘可以被 1×2 骨牌完全覆盖的充要条件是：去掉的那个格为偶格.

证：一方面，因为 mn 为奇数，所以棋盘中奇格比偶格少一个. 但任何一个 1×2 骨牌盖住一个奇格和一个偶格，从而被覆盖的奇格和偶格同样多. 于是，只能去掉一个偶格.

另一方面，设去掉的偶格为 a_{ij}，此时有两种情况：

(1) i 与 j 同为奇数. 此时，将去掉 a_{ij}以后的棋盘按图 27 的方式分为 4 块，其中 1,3 两块有偶数列，2,4 两块有偶数行，均存在 1×2 骨牌的完全覆盖.

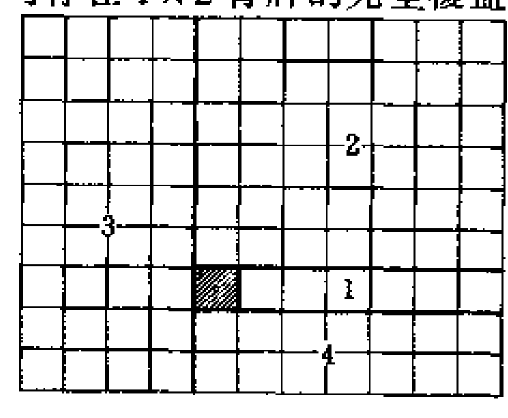


图 27

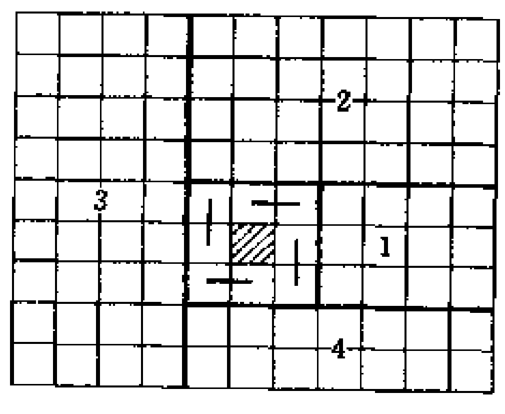


图 28

(2) i 与 j 同为偶数. 此时, $i\neq 1, j\neq 1$, 所以 a_{ij} 不与棋盘的边界相邻. 此时, 先将 a_{ij} 周围的 8 个格按图 28 的方式盖好, 再将剩下的格分为 4 块, 其中 1,3 两块有偶数列, 2,4 两块有偶数行, 均存在 1×2 骨牌的完全覆盖.

定理 11 设 mn 为偶数, 在 $m\times n$ 棋盘中去掉两个格, 使剩下的残缺棋盘可以用 1×2 骨牌完全覆盖的充要条件是: 去掉的那两个格一奇一偶.

证: 我们只给出 m, n 都是偶数的情形的证明. 当 m, n 一奇一偶时, 类似可证.

显然, 去掉的两个格只能是一为奇格, 一为偶格. 反之, 任意去掉一个奇格和一个偶格, 不妨设这两个去掉的格位于不同的两行(否则, 旋转 90° 即可), 而且不妨设偶格 A(如图 29)在第 i 行, 奇格 B 在第 j 行($i<j$, 否则旋转 180° 即可). 若 i, j 都是奇数, 则 A 在第奇数列, B 位于偶数列. 因为 A 所在行左边剩下偶数个格, 可用若干个 1×2 骨牌完全覆盖. 前面 $i-1$ 行的每一行都分别可覆盖. 于是按图 29 的方式, 可将 i 行到第 $j-1$ 行的所有格及第 j 行 B 左边的方格用若干个 1×2 骨牌完全覆盖. 此时, 注意到 B 在偶数列, B 的右边有偶数个格, B 的下方有奇数行, 每行有偶数个格, 于是剩下的格也可用若干个 1×2 骨牌完全覆盖. 对 i, j 的其他情况可以类似讨论.

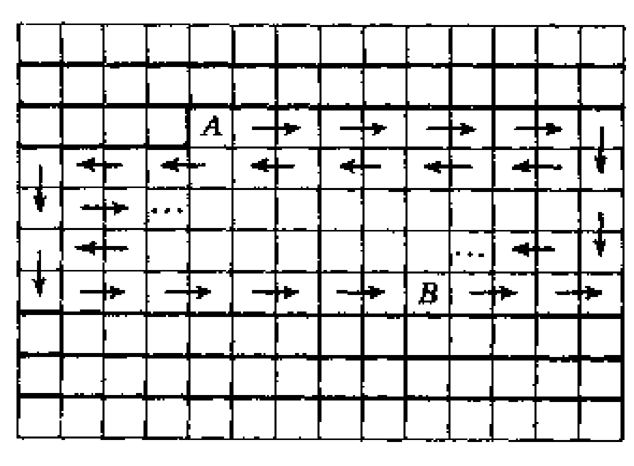


图 29

1.2 棋盘的饱和覆盖

比棋盘的完全覆盖稍复杂一点的覆盖是棋盘的饱和覆盖.

定义 对于棋盘的任一同形覆盖 P,如果覆盖 P 中不能再放进一块同样的覆盖形,则称 P 为棋盘的此覆盖形的饱和覆盖.

对于给定的 $m\times n$ 棋盘,探求它的饱和覆盖 P 中 $|P|$ 的最大值和最小值是一个十分有趣且容量相当大的问题(其中 $|P|$ 表示覆盖 P 中覆盖形的个数). $m\times n$ 棋盘的任何同形覆盖都可以研究相应的饱和覆盖.本节中,我们仅介绍 $m\times n$ 棋盘的 $3-L$ 形,1×2 骨牌的饱和覆盖中的有关结果.

定理 1 设 P 是 $n\times n$ 棋盘的 $3-L$ 形饱和覆盖,则

$$|P|_{\max}=\begin{cases}\left[\dfrac{n^2}{3}\right]-1,(n=3)\\ \left[\dfrac{n^2}{3}\right].(n\neq 3)\end{cases}$$

证:(1)当 $n=1$ 时,显然 $|P|_{\max}=0$,结论成立.

(2)当 $n=3$ 时,由 1.1 中定理 3,3×3 棋盘不存在 $3-L$ 形的完全覆盖,从而 $|P|<3$. 由此可知,$|P|_{\max}=2$.

(3)当 $n=3m(m\geqslant 2,m\in N)$时,由 1.1 中定理 1,$3m\times 3m$ 棋盘存在 $3-L$ 形的完全覆盖,故

$$|P|_{\max}=\frac{3m\times 3m}{3}=\frac{n^2}{3}=\left[\frac{n^2}{3}\right].$$

(4)当 $n=3m+t(t^2=1,m\in N)$时,对 m 用数学归纳法.

首先,$m=1$ 时,$n=2$ 或 4;$m=2$ 时,$n=5$ 或 7. 由图 1~图 4,结论成立.

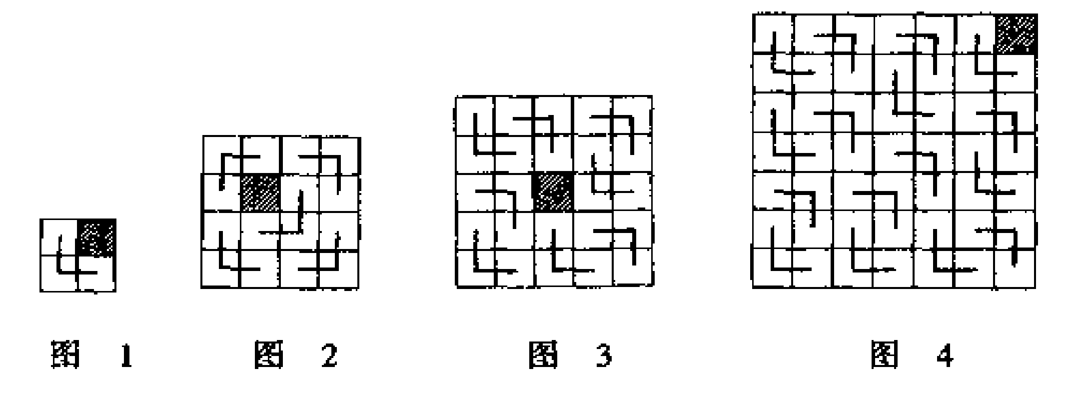


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

其次,设 $m \leqslant k$ 时结论成立.那么,$m = k+2$ 时,

(i)若 $3k+t$ 为偶数,如图 5,将 $n \times n$ 棋盘划分为一个 $(3k+t)\times(3k+t)$ 棋盘,一个 6×6 棋盘和两个 $6\times(3k+t)$ 棋盘.由 1.1 中定理 3,6×6 棋盘,$6\times(3k+t)$ 棋盘均可 $3-L$ 形完全覆盖,结合归纳假设,结论成立.

(ii)若 $3k+t$ 为奇数,如图 6,将 $n \times n$ 棋盘划分为一个 $(3k+t)\times(3k+t)$ 棋盘,两个 $6\times(3k+t-1)$ 棋盘和一个去掉了右上角一个小方格的 $7\times7-1$ 棋盘.

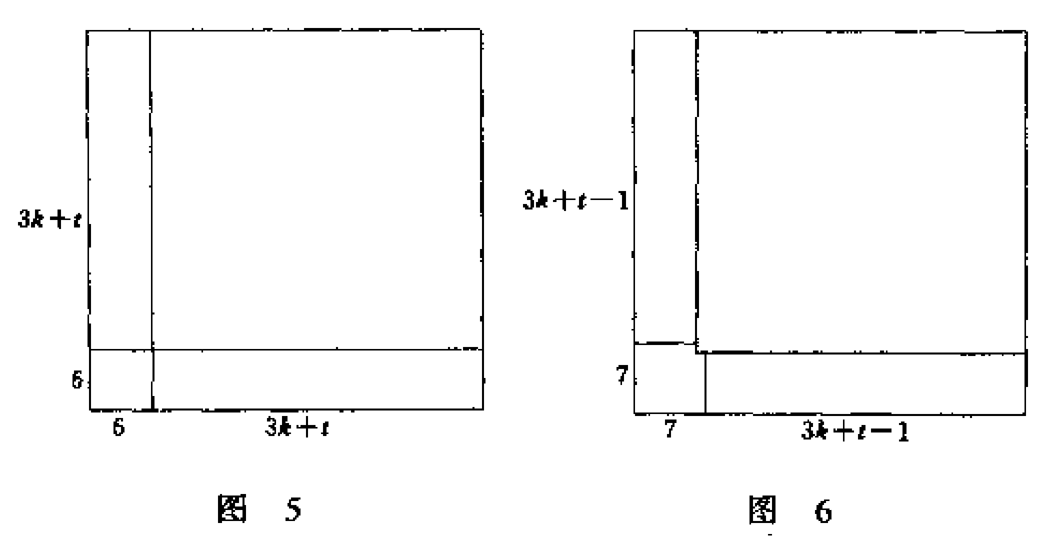


图 5　　图 6

由 1.1 中定理 3,$6\times(3k+t-1)$ 棋盘可 $3-L$ 形完全覆盖.由 1.1 中定理 8,去掉右上角一个方格的 $7\times7-1$ 棋盘可 $3-L$ 形完全覆盖,结合归纳假设,结论成立.

综上所述,定理1获证.

定理2 设 P 是 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 $3-L$ 形饱和覆盖,则当 m,n 中一个为3,一个为奇数时,$|P|_{\max}=\left[\frac{mn}{3}\right]-1$;对 m,n 的其他取值,$|P|_{\max}=\left[\frac{mn}{3}\right]$.

证:由1.1中定理3,我们只须验证命题对 $(3m+1)\times(3n+1)$,$(3m+2)\times(3n+1)$,$(3m+2)\times(3n+2)$ 这3类棋盘成立.

首先考察 $(3m+1)\times(3n+1)$ 棋盘.对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,因为 $4\times(3n+1)=4\times[3(n-1)+4]$,又 $4\times3(n-1)$ 棋盘可 $3-L$ 形完全覆盖,4×4 棋盘去掉一个方格后可 $3-L$ 形完全覆盖,所以结论成立.

当 $m=2$ 时,若 $n=1$,由图7,结论成立.

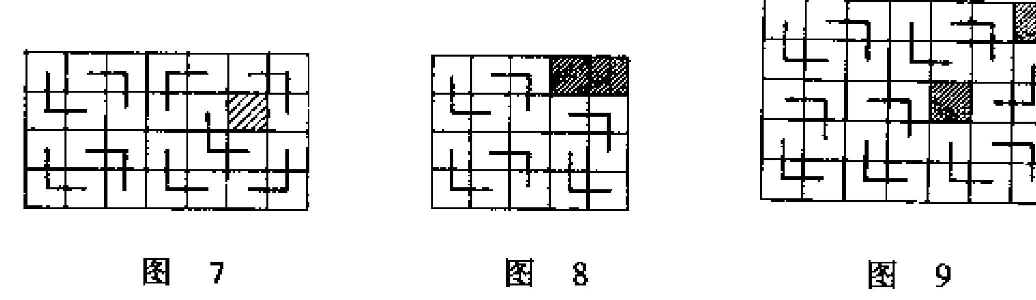


图 7　　　　图 8　　　　图 9

若 $n=2$,由图4,结论成立;若 $n\geqslant3$,因为 $7\times(3n+1)=7\times[3(n-1)+4]$,由于 $3(n-1)\geqslant6$,由1.1中定理3,$7\times3(n-1)$ 棋盘可 $3-L$ 形完全覆盖.结合图7,结论成立.

设 $m\leqslant k$ 时结论成立.那么,当 $m=k+2$ 时,将 $(3k+7)\times(3n+1)$ 棋盘分为一个 $(3k+1)\times(3n+1)$ 棋盘和一个 $6\times(3n+1)$ 棋盘.由于 $6\times(3n+1)$ 棋盘可 $3-L$ 形完全覆盖,利用归纳假设,结论成立.

其次,考察 $(3m+2)\times(3n+1)$ 棋盘.对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,若 $n=1$,由图 8,结论成立;若 $n=2$,由图 9,结论成立;若 $n>2$,因为 $5\times(3n+1)=5\times[3(n-1)+4]$,由 1.1 中定理 3,$5\times3(n-1)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合图 8,结论成立.



图 10

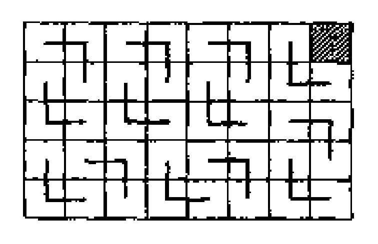


图 11

当 $m=2$ 时,因为 $8\times(3n+1)=8\times[3(n-1)+4]$,又 $8\times3(n-1)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合图 10,结论成立.

设 $m\leqslant k$ 时结论成立.那么,$m=k+2$ 时,由于$(3k+8)\times(3n+1)=[(3k+2)+6]\times(3n+1)$,又 $6\times(3n+1)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合归纳假设,结论成立.

最后考察$(3m+2)\times(3n+2)$棋盘.对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,若 $n=1$,由图 3,结论成立;若 $n=2$,由图 11,结论成立;若 $n>2$,因为 $5\times(3n+2)=5\times[3(n-1)+5]$,又 $5\times3(n-1)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合图 3,结论成立.

当 $m=2$ 时,因为 $8\times(3n+2)=8\times[3(n-1)+5]$,又 $8\times3(n-1)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合图 11,结论成立.

设 $m\leqslant k$ 时结论成立.那么,$m=k+2$ 时,因为$(3k+8)\times(3n+2)=[(3k+2)+6]\times(3n+2)$,又 $6\times(3n+2)$棋盘可 3 - L 形完全覆盖,结合归纳假设,结论成立.

综上所述,定理 2 获证.

对于一般的 $m\times n$ 棋盘的 3 - L 形饱和覆盖 P,求 $|P|$ 的

最小值是一个相当困难的问题.我们仅得到了$|P|$的最小值的界的估计,即下面的定理:

定理 3 设 P 是 $m\times n$ 棋盘的 $3-L$ 形饱和覆盖,则

$$\frac{2[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]}{3}<|P|_{\min}\leqslant\frac{[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]+[1-(-1)^{mn}]}{2}.$$

证:首先,$m\times n$ 棋盘可分割出$[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]$个 2×2 正方形,其中每个正方形在 P 中至少有 2 个格被盖住,从而 $m\times n$ 棋盘在 P 中至少有 $2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]$个格被盖住.所以,

$$|P|_{\min}\geqslant\frac{2[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]}{3}.$$

但每个正方形恰盖住 2 个格是不可能的(对正方形个数用数学归纳法即可),从而此不等式等号不成立.

其次,将第 i 行第 j 列的格记为 a_{ij},若格 $a_{2i,2j-1}$, $a_{2i,2j}$, $a_{2i-1,2j}$在 $m\times n$ 棋盘中都存在,则令它们被同一块 $3-L$ 形盖住.如果 m,n 都是奇数,再令 $a_{m,n-1}$, $a_{m,n}$, $a_{m-1,n}$被同一块 $3-L$ 形盖住(见图 12).显然,此覆盖为饱和覆盖.此时,P 中 $3-L$ 形的个数:当 mn 为偶数时是$[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]$;当 mn 为奇数时是$[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]+1$.证毕.

对于 $m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌的饱和覆盖,其$|P|_{\max}$的结果是相当平凡的.显然有$|P|_{\max}=[\frac{mn}{2}]$.但其$|P|_{\min}$的探求则十分困难,我们只知道如下一个特殊结果.

定理 4 设 P 是 $3m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌的饱和覆盖,则$|P|_{\min}=mn$.

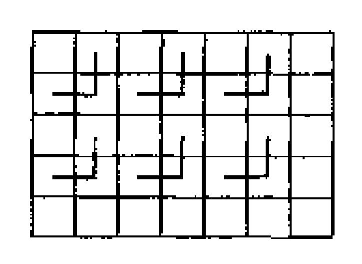


图　12

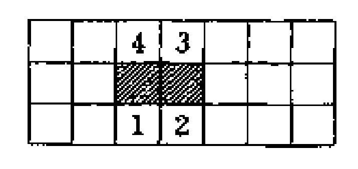


图　13

证：将棋盘划分为 m 个 $3\times n$ 棋盘，考察任一个 $3\times n$ 棋盘中间一行方格在 P 中的覆盖情况．如果有某两个相邻的方格被同一块骨牌盖住(见图 13)，则编号为 1，2，3，4 的方格有 2 格在 P 中被骨牌盖住，否则 P 是不饱和的．于是，这块骨牌所在的两列在 P 中被盖住的方格不少于它的总格数的 $\frac{2}{3}$．去掉所有这样的列，则剩下的任何一列最多有一个空格(未被骨牌盖住的格)，否则只能是两头两个方格为空格，中间一格被盖住．但这是前述被去掉了的情形．由此可知，$3\times n$ 棋盘在 P 中被盖住的格数不少于它的总格数的 $\frac{2}{3}$．这样，$3m\times n$ 棋盘在 P 中被盖住的格数不少于 $3mn\times\frac{2}{3}=2mn$．从而 P 中至少有 mn 块骨牌．最后，按图 14 的方式覆盖，即对任何自然数 i,j，令 $a_{2i-1,3j-2}$ 与 $a_{2i-1,3j-1}$ 被同一块骨牌盖住；$a_{2i,3j-1}$ 与 $a_{2i,3j}$ 被同一块骨牌盖住，则 P 中恰有 mn 块骨牌，且 P 是饱和覆盖．

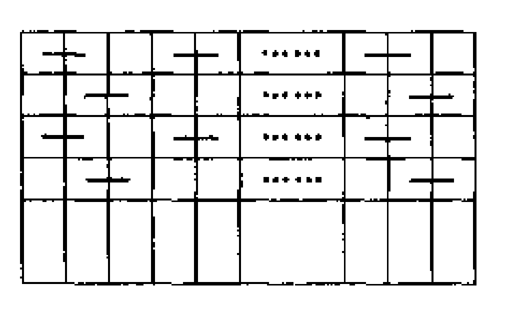


图　14

对于一般的 $m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌的饱和覆盖 P，$|P|$ 的最小值是什么？这仍是一个悬而未决且难度相当大的问题，希望读者能得到圆满的结果．

1.3 棋盘的无缝覆盖

棋盘的无缝覆盖是棋盘覆盖中难度较大的一种覆盖，本节中我们介绍几个简单的结果.先给出如下一些概念：

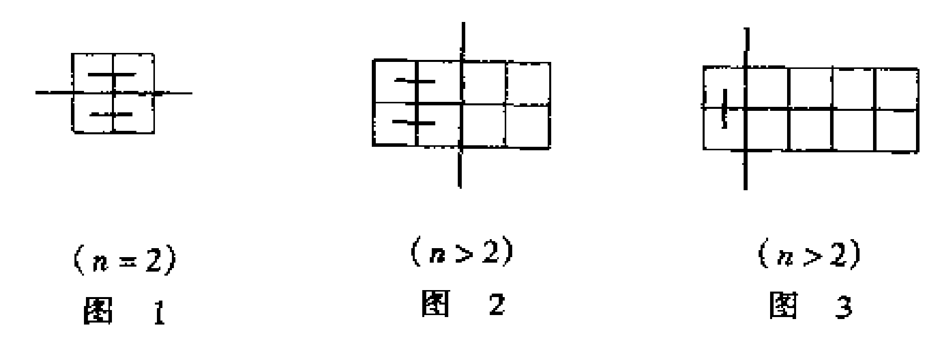
定义 1 在 $m\times n$ 棋盘的完全覆盖 P 中，若直线 a 将棋盘划分为非空的两块，且 a 不穿过其中任何一个覆盖形(即直线 a 上的点至多是覆盖形的边界点)，则称直线 a 是覆盖 P 的分割线.

定义 2 在 $m\times n$ 棋盘的完全覆盖 P 中，若 P 不存在任何分割线，则称覆盖 P 是*无缝覆盖*.

对怎样的自然数 $m,n>1$，$m\times n$ 棋盘存在某种覆盖形的无缝覆盖？这是人们普遍关心的一个问题.1995 年，我们解决了 $m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌无缝覆盖问题.现分 6 个命题叙述于下.

命题 1 $2\times n(n>1)$棋盘不存在 1×2 骨牌的无缝覆盖.

证：考察 $2\times n$ 棋盘前两列格的覆盖方式(图 1～图 3)，不论那种情形，$2\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌的覆盖中都存在分割线.



$(n=2)$ 图 1　　$(n>2)$ 图 2　　$(n>2)$ 图 3

命题 2 $3\times n(n>1)$棋盘不存在 1×2 骨牌的无缝覆盖.

证：当 $n=2$ 时，由命题 1，结论成立.

设 $n>2$，我们用(a,b)表示格 a 和 b 被同一块骨牌盖

住．若 $3\times n(n>1)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖，则格 a_{21} 的覆盖方式本质上只有一种（图 4）．不妨设有（a_{21}，a_{11}），则必有（a_{31}，a_{32}），此时，不能有（a_{12}，a_{22}），否则出现分割线．于是必有（a_{12}，a_{13}）．同样有（a_{22}，a_{23}），（a_{33}，a_{34}），……如此下去，可知第三行的格都被横向骨牌覆盖，于是出现一条横向的分割线，矛盾．

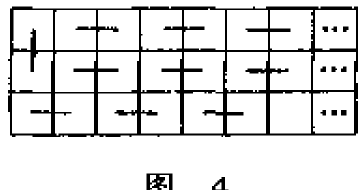


图 4

命题 3　$4\times n(n>1)$ 棋盘不存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．

证：反设 $4\times n(n>1)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖 P．考察棋盘的非边界的纵向格线，共有 $n-1$ 条．我们证明，在覆盖 P 中，棋盘每条非边界的纵向格线至少穿过 2 块横向骨牌．否则，由无缝覆盖的定义可知，存在一条非边界的纵向格线 a，它恰好穿过一块横向骨牌．直线 a 将棋盘划分为非空的两块，挖去 a 穿过的那块横向骨牌，则 a 两侧的残缺棋盘被 1×2 骨牌完全覆盖．但每个残缺棋盘都有奇数个格，矛盾．于是，$n-1$ 条非边界的纵向格线上至少盖住 $2(n-1)=2n-2$ 块骨牌，又每条横向格线上至少盖住一块骨牌，所以棋盘中的骨牌总数至少有 $(2n-2)+3=2n+1$．但 $4\times n$ 棋盘上只能覆盖 $2n$ 块骨牌，矛盾．

命题 4　5×6 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．

证：5×6 棋盘的 1×2 骨牌的无缝覆盖如图 5 所示．这个构图可通过如下步骤发现：

(1)将 5 条非边界的纵向格线从左至右依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_5$，则 a_2,a_4 至少穿过两块横向骨牌．否则，不妨设 a_2 只穿过一块横向骨牌，直线 a_2 将棋盘划分为非空的两块．挖去 a_2 穿过的那块横向骨牌，则 a_2 两侧的残缺棋盘均被 1×2 骨牌完全覆盖．但两个残缺棋盘中有一个残缺棋盘有奇数个格，矛

盾.

(2)同(1)的理由可知,每条非边界的横向格线至少穿过两块纵向骨牌.

(3) a_1, a_3, a_5 分别至少穿过一块横向骨牌.于是,5×6 棋盘的无缝覆盖中至少有 $2\times2+4\times2+3=15$ 块骨牌.但 5×6 棋盘的完全覆盖中恰有 15 块骨牌,所以,a_2, a_4 上分别覆盖了两块横向骨牌. a_1, a_3, a_5 上分别覆盖了一块横向骨牌,每条非边界的纵向格线上分别覆盖了两块纵向骨牌.

综上,不难得到图 5 中的覆盖.

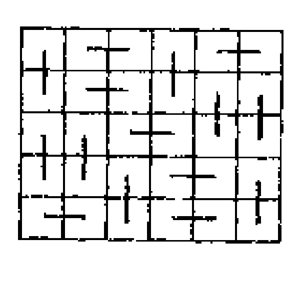


图 5

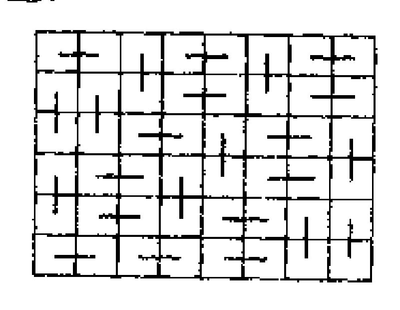


图 6

命题 5 6×8 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖.

证:6×8 棋盘的 1×2 骨牌的无缝覆盖如图 6 所示.

命题 6 若 $m\times n$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖,则 $m\times(n+2)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖.

证:将 $m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌无缝覆盖中盖住棋盘最后一列格的所有骨牌都向右平移两个单位,则每一行都留出两个相邻的空格.将每一行中新出现的两个相邻的空格用一块横向骨牌盖住,得到 $m\times(n+2)$ 棋盘的完全覆盖.我们说,此覆盖是 1×2 骨牌的无缝覆盖.实际上,由于原 $m\times n$ 棋盘是 1×2 骨牌的无缝覆盖,所以每条横向格线上至少有一块骨牌.此外,$m\times(n+2)$ 棋盘在原 $m\times n$ 棋盘的基础上增加了两条纵向格线,但新覆盖的 m 块横向骨牌不会盖在同一条纵

向格线上，否则，原棋盘的覆盖中有纵向分割线，所以每条新增的纵向格线上都至少盖住一块新增的骨牌．命题 6 获证．

命题 7　6×6 棋盘不存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．

证：反设 6×6 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖 P．考察 6×6 棋盘的 5 条非边界的纵向格线，同命题 3 所证，在覆盖 P 中，每条非边界的纵向格线上至少覆盖 2 块骨牌．于是 5 条非边界的纵向格线上至少覆盖了 $5\times2=10$ 块骨牌．同理，5 条非边界的横向格线上也至少覆盖了 $5\times2=10$ 块骨牌．这样，覆盖 P 中至少覆盖了 $10+10=20$ 块骨牌，至少盖住 $40>36$ 个格，矛盾．命题 7 获证．

定理 1　$m\times n$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖的充要条件是：mn 为偶数，$m,n\geqslant5$ 且 $(m,n)\neq(6,6)$．

证：因为 5×6 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖，所以由命题 6，$5\times2k(k\geqslant3)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．进而 $(2r+1)\times2k(r\geqslant2,k\geqslant3)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．

又因为 6×5 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖，由命题 6，6×7 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．又 6×8 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖，所以 $6\times n(n\geqslant5,n\neq6)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．所以，$2r\times n(r\geqslant3,n\geqslant5)$ 棋盘存在 1×2 骨牌的无缝覆盖．证毕．

比无缝覆盖更严格的一个覆盖问题是所谓子覆盖问题．

定义 3　设 P 是 $m\times n$ 棋盘的某个同形完全覆盖．若 P 中存在一个非覆盖形且非整个棋盘的 $r\times s$ 矩形，它被 P 中若干个覆盖形完全覆盖，则称此 $r\times s$ 矩形中的覆盖为覆盖 P 的子覆盖．

定理 2　当 m 或 $n>2$ 时，$m\times n$ 棋盘的 1×2 骨牌的任

何完全覆盖都必有子覆盖.

证:反设 $m\times n$ 棋盘存在一个覆盖 P,P 中无子覆盖.不妨设 $m>2$,考察 $m\times n$ 棋盘的格 a_{11}的覆盖.若有(a_{11},a_{21}),则必有(a_{31},a_{32}),于是必有(a_{12},a_{22}),出现 2×2 的子覆盖,矛盾.若有(a_{11},a_{12}),则再考察格 a_{21}的覆盖,不能有(a_{21},a_{22}),于是若 $n=2$,则只能有(a_{21},a_{22}),矛盾;若 $n=3$,则必有(a_{22},a_{23}),此时格 a_{13}无法覆盖;若 $n\geqslant 4$,则必有(a_{22},a_{23}),进而有(a_{13},a_{14}),出现 1×4 的子覆盖,矛盾.定理 2 获证.

对于其他的覆盖形,$m\times n$ 棋盘存在不含子覆盖的完全覆盖的条件的探求是一个难度相当大的问题.比如,对哪些自然数 m,n,$m\times n$ 棋盘存在 3-L 形的完全覆盖 P,使 P 中不存在子覆盖? 这便是一个很难解决的问题.对此,我们仅知道:$4\times n$ 棋盘存在 3-L 形不含子覆盖的完全覆盖的充要条件是 $n=6$.此外,6×6 棋盘存在不含子覆盖的完全覆盖.实际上,4×6 棋盘,6×6 棋盘的不含子覆盖的 3-L 形完全覆盖如图 7,图 8 所示.

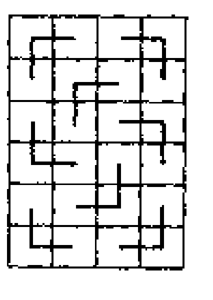


图 7

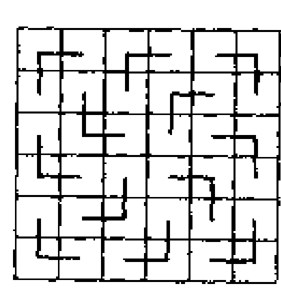


图 8

1.4 棋盘的互异覆盖

棋盘的互异覆盖是棋盘覆盖中难度最大的一种覆盖,本节简要介绍这方面的若干结果.先给出如下一些概念:

定义 1 在棋盘的同形完全覆盖中,若任何两个覆盖形不全等,则称之为棋盘的*互异覆盖*.

棋盘中常见的互异覆盖有互异矩形覆盖,互异正方形覆

盖，互异 L 形覆盖等．其中互异 L 形覆盖又可分为互异 $3-L$ 形覆盖和全异 L 形覆盖．

定义 2 在由 3 个正方形构成的 $3-L$ 形中，若每个正方形都由 k^2 个单位正方形组成，则称此 $3-L$ 形为 k 级 $3-L$ 形．

定义 3 在棋盘的 L 形互异覆盖中，若所有覆盖形都是 $3-L$形，但任何两个 $3-L$ 形的级不同，则称为棋盘的互异 $3-L$ 形覆盖；若所有 L 形互不相似，则称为棋盘的全异 L 形覆盖．

关于棋盘的互异覆盖，一个简单的结果是下面的定理：

定理 1 $m\times n$ 棋盘存在互异矩形覆盖的充要条件是：$m+n\geqslant 4$，且 $(m,n)\neq(2,2)$．

证：不妨设 $m\leqslant n$．当 $m=1$ 时，$n\geqslant 3$．$m\times n$ 棋盘可用一个 1×1 矩形和一个 $1\times(n-1)$ 矩形覆盖，结论成立；

当 $m=2$ 时，$n\geqslant 3$．$m\times n$ 棋盘可用一个 2×1 矩形和一个 $2\times(n-1)$ 矩形覆盖，结论成立；

当 $m\geqslant 3$ 时，$n\geqslant m\geqslant 3$．此时，$m\times n$ 棋盘可用一个 $1\times n$ 矩形和一个 $(m-1)\times n$ 矩形覆盖，结论成立．

综上所述，定理 1 获证．

棋盘的互异矩形覆盖的充要条件是很平凡的．但棋盘的互异正方形覆盖的条件的探求则十分困难．我们先讨论怎样找到棋盘的一个互异正方形覆盖，这显然依赖于对互异正方形覆盖的性质的认识．对此，我们介绍如下的一些基本结论：

命题 1 设 $m\times n$ 棋盘存在互异正方形覆盖，则其中最小的覆盖正方形不能与 $m\times n$ 棋盘的边相邻．

证：用反证法．若不然，则最小正方形 S 在棋盘中的位置仅有图 1 和图 2 所示的两种：

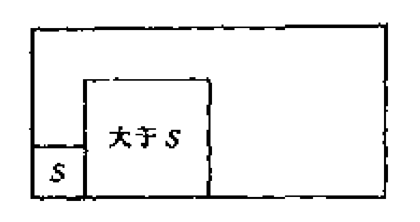


图 1

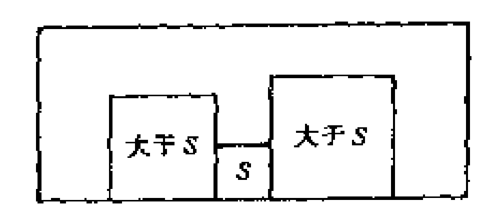


图 2

由互异正方形覆盖的定义,不论哪种形式,S 上方的覆盖正方形比 S 小,与 S 的最小性矛盾.

命题 2 设 $m\times n$ 棋盘存在互异正方形覆盖,则其中最小的覆盖正方形 S 与它的任何一个相邻覆盖正方形 A 至少有一边是"平齐"的.

证:用反证法.若不然,则最小覆盖正方形 S 与它的任意一个相邻覆盖正方形 A 的相互位置关系仅有图 3 和图 4 所示的两种可能:

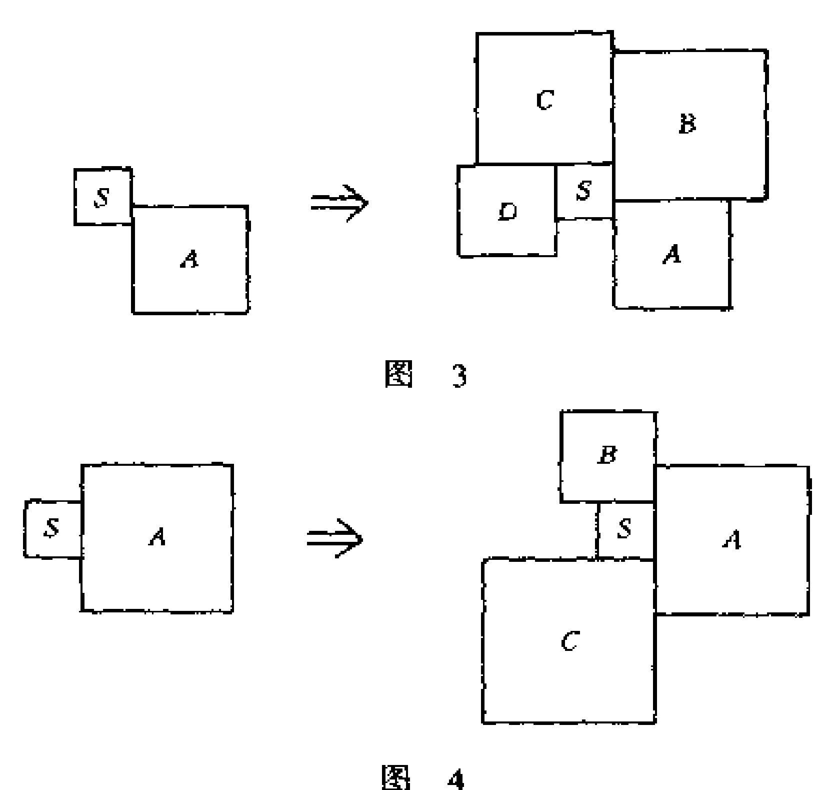


图 3

图 4

对于图 3,我们分别考察 A,S 上方的覆盖正方形 B,C 及 S 左边的覆盖正方形 D. 不难发现 S 下方的覆盖正方形比 S 要小,矛盾. 对于图 4,我们依次考察 S 上方及下方的覆盖正方形 B,C. 不难发现 S 左边的覆盖正方形比 S 要小,矛盾.

由命题 1 和命题 2 可知,棋盘的互异正方形覆盖中最小覆盖正方形 S 与其相邻的覆盖正方形的相对位置关系只有如图 5 所示的一种. 由此提供了构造棋盘的一种互异正方形覆盖的途径. 首先,对图 5 进行"同构"变形,使 S 左边和下方的两个矩形的边是平齐的(图 6). 此时,仍认为 A,B,C,D 是正方形. 这样,再补上两个正方形 E,F,便可拼成一个大矩形. 但当所有覆盖形都视作正方形时,D,E 的大小相同,与互异覆盖矛盾. 于是,我们将图 6 修改为图 7 的形状.

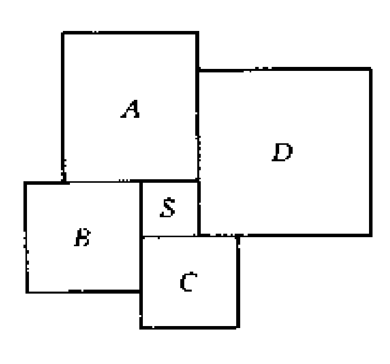



图 5

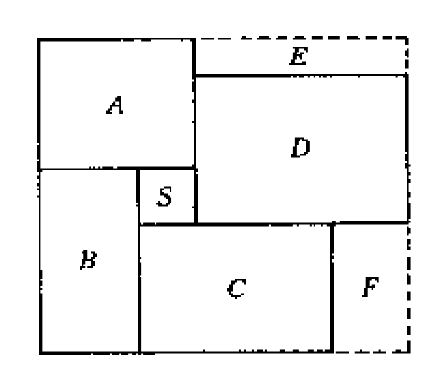


图 6

设图 7 中 G 的边长为 x,D 的边长为 y,则 F 的边长为 $x+y$,H 的边长为 $2x+y$,E 的边长为 $x+2y$,C 的边长为 $3x+y$. 又由 S,D,C,G 的位置关系,知 S 的边长为 $3x+y+x-y=4x$. 于是 B 的边长为 $7x+y$,A 的边长为 $11x+y$. 再由 A,S,E,D 的位置关系,有 $(11x+y)+4x=(x+2y)+y$,即 $y=7x$.

令 $x=1$,便得到图 8 所示的 32×33 棋盘的互异正方形覆

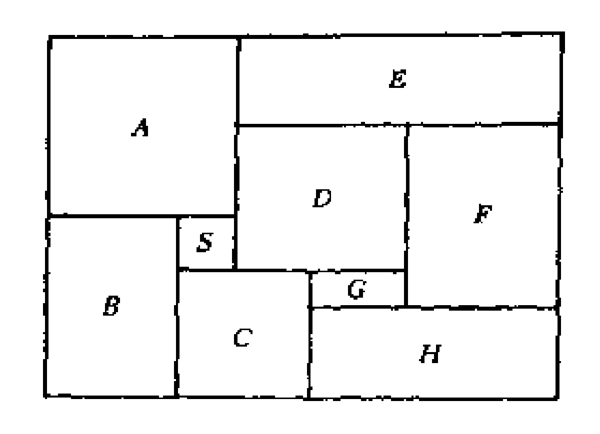


图 7

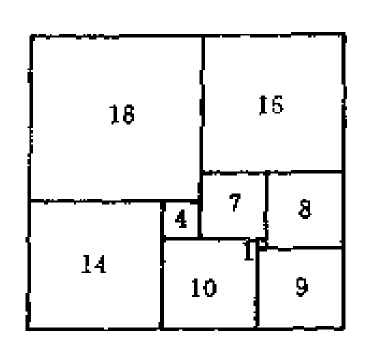


图 8

盖，注意此时最小覆盖正方形是 G 而不是 S，这是因为 G，S 与各自相邻的覆盖正方形的相对位置关系相同.

棋盘的互异正方形覆盖与著名的世界难题"正方形的完美分割"有关.

定义 4 将矩形分割为若干个大小互不相同的正方形称为矩形的完美分割. 能够进行完美分割的矩形称为完美矩形. 完美矩形中分割出来的不同正方形的个数称为此完美矩形的阶.

显然，棋盘的互异正方形覆盖即是矩形的完美分割. 早在 1923 年，波兰利沃夫大学的鲁齐维茨教授曾首先提出完美矩形的存在性问题. 1925 年，数学家莫伦(Moron)最先找到了第一个完美矩形，它是一个 10 阶的完美矩形(图 9). 不久后，他又找到了一个 9 阶的完美矩形，它正是我们前面提到的 32×33 棋盘异形正方形覆盖(图 8).

1938 年，当时在英国剑桥大学就读的当代组合学专家布鲁克斯等 4 人发现完美矩形与电路网络中的基尔霍夫定理有紧密的联系，使人们对完美矩形的兴趣倍增，不断发现一些新的完美矩形. 到 1940 年，布鲁克斯等人找到了 9 至 11 阶的全

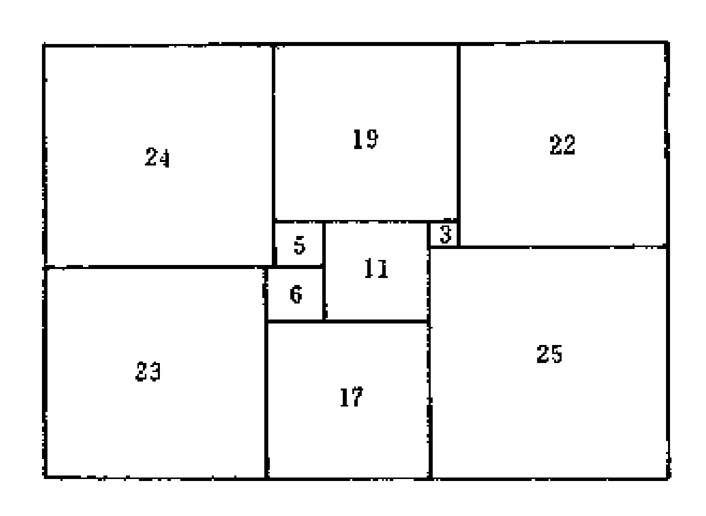


图 9

部完美矩形.同时他们还证明完美矩形的最小阶数为 9,且仅有两个 9 阶的完美矩形.另一个 9 阶的完美矩形如图 10 所示.1960 年,布坎普等人借助计算机给出了全部 9 至 15 阶的完美矩形.

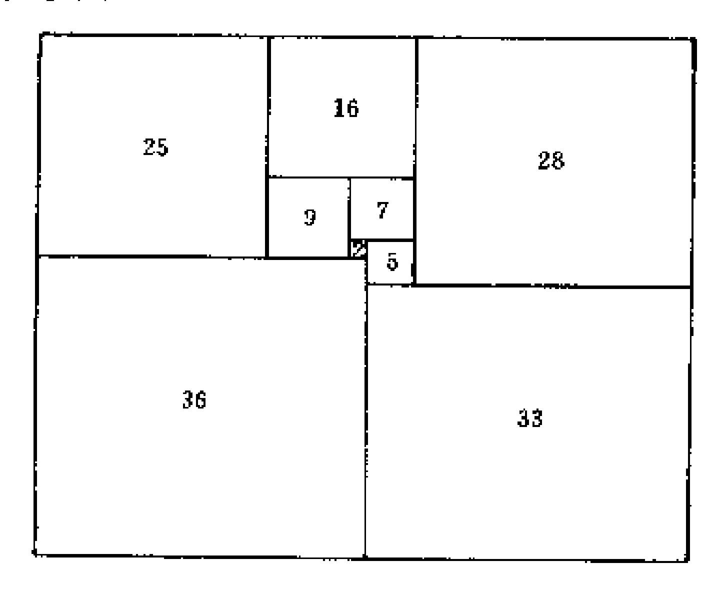


图 10

长期以来,人们以为完美正方形不存在.但 1939 年斯普拉格(Sprague)找到了第一个完美正方形,从而否定了人们的

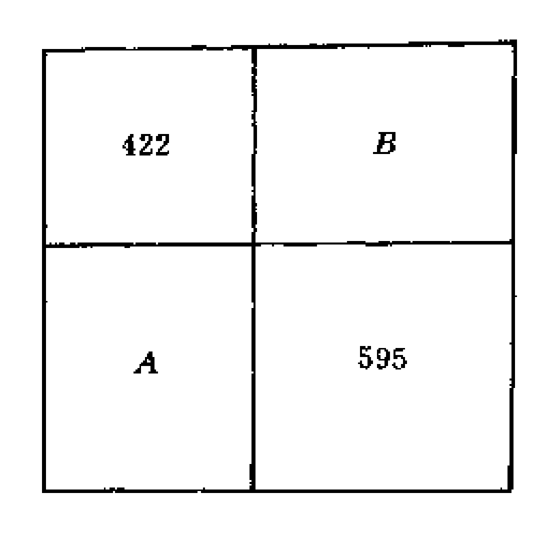


图 11
其中 A, B 部分
如右所示.

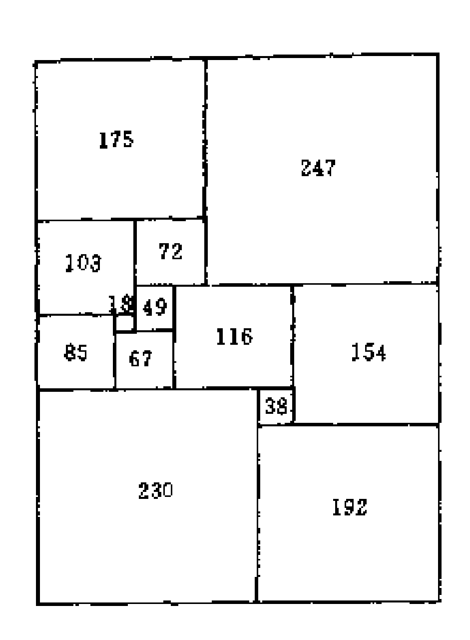


图 A

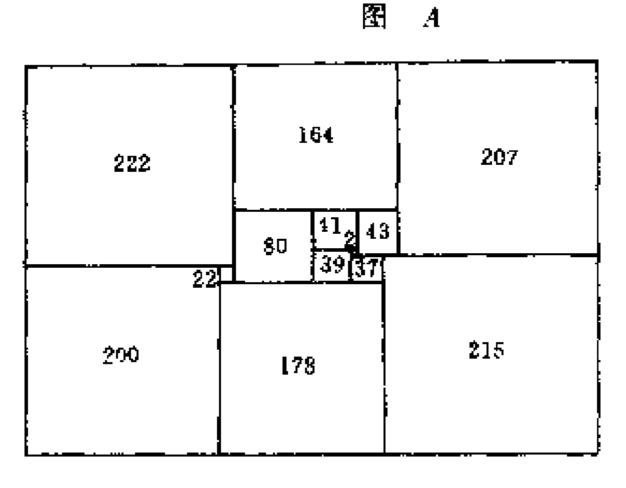


图 B

猜想. 他给出的完美正方形的阶数较大, 是 55 阶的, 其边长为 4025. 几个月后, 一个边长更小(1015), 阶数更少(28)的完美正方形被布鲁克斯等人找到了(图 11). 1948 年, 威尔科克斯(Willcocks)给出了一个 24 阶的完美正方形(图 12). 人们一度以为 24 就是完美正方形的最小阶, 因为这个数作为最小阶的记录一直保持了 30 年. 直到 1978 年, 杜伊维斯廷(Duijvestijn)借助大型计算机, 构造了一个 21 阶的完美正方形(图 13). 他同时还证明了完美正方形的最小阶数为 21, 且 21 阶的完美正方形唯一存在. 至此, 完美正方形的研究告一段落.

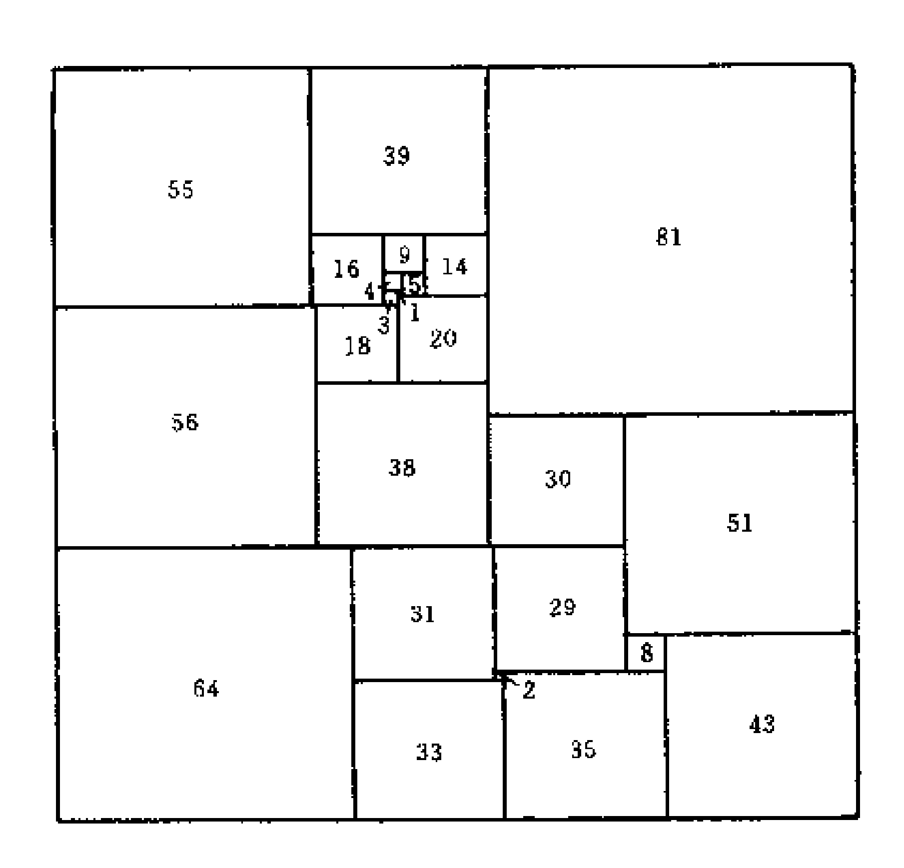

55
39
81
16
9
14
4
5
1
3
18
20
56
38
30
51
31
29
8
64
2
33
35
43

图 12

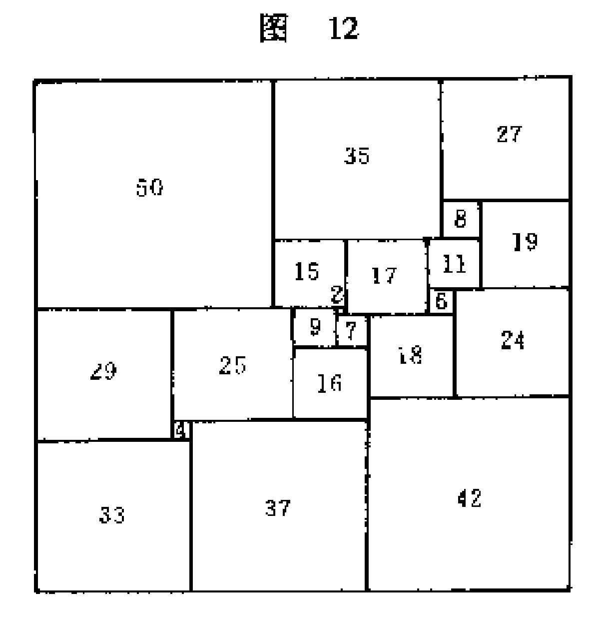

50
35
27
8
19
15
17
11
2
6
9
7
24
29
25
18
16
4
33
37
42

图 13

但是，完美正方形的研究并没有到此结束．一方面，上述一些结果的发现或证明要借助计算机，这不能不说是一种遗憾．因为人们总是担心计算机的证明是否有毛病．比如计算程序是否有差错？计算机本身是否有故障？等等．因此，找到这些结果的简单证明是不无意义的．另一方面，人们还没有发现究竟哪些正方形是完美正方形，或者说，没有给出一个判断正方形是否为完美正方形的标准．比如，完美正方形的最小(整)边长是多少？此外，对哪些自然数 r，存在 r 阶完美正方形？比如，是否存在 22 阶的完美正方形？这些都有待人们继续研究．

有趣的是，上述找到的正方形的完美分割都可以看作是正方形棋盘的互异正方形覆盖，因为每个完美正方形的边长都是整数．或者说，完美正方形的边长与其分割出的任何一个小正方形的边长的比为有理数．这就自然提出如下的问题：

问题 1 是否存在完美正方形，使其分割出的小正方形中存在一个正方形，其边长与原正方形的边长的比为无理数？

如果将完美正方形的要求减弱些，即可得到一些“不太完美”的正方形，比如允许正方形在分割中含有一个非正方形的矩形．我们称可进行这样分割的正方形为“拟完美正方形”．这又可提出如下一些问题：

问题 2 哪些正方形是“拟完美正方形”？

问题 3 对于一个“拟完美正方形”，如何找到最优分割，使那个非正方形的矩形的面积最小？

显然，如果我们将两个完美正方形拼成一个矩形，将其中一个正方形按图 13 的方式进行完美分割，则得到矩形的一个完美分割．另外，将两个完美正方形分别按图 13，图 12 的方式进行分割，然后将分割出的正方形边长按比例扩大成整边长，

便得到一个矩形的完美分割.假若我们略去这样一些显然的事实,即是说,在矩形的完美分割中,假定其分割不能由另外两种分割拼成,并称这样的完美分割为无缝完美分割.那么,哪些矩形存在无缝完美分割? 1969年,P.J.Federico找到了270×135矩形的一个无缝完美分割,它把此矩形分割成了23个正方形,其边长分别为:81,75,72,63,60,54,43,42,28,27,26,24,23,22,19,16,15,14,9,8,4,2,1.有兴趣的读者不妨画出这个矩形的完美分割.

在棋盘的互异覆盖中,还有一种更有趣的覆盖,我们称之为连续覆盖.

定义5 用$r(r\geq2)$个矩形完全覆盖$n\times n$正方形棋盘,使这些矩形的边长构成集合$\{1,2,3,\cdots,2r\}$,称为正方形棋盘的r-阶连续覆盖.可以进行r-阶连续覆盖的正方形棋盘称为r-阶连续棋盘,r称为棋盘的连续覆盖数,简称连续数.

棋盘的连续覆盖可研究如下一些方面的问题:

(1)哪些正方形棋盘是连续棋盘?

(2)哪些数是连续数?

(3)若r是连续数,相应的r-阶连续棋盘有多少个?

(4)若某个棋盘是连续棋盘,则其不同的连续分割方式有多少种?

解决这些问题中的任何一个都不是很容易的,下面介绍这方面的初步结果.

先求最小的连续数.为了叙述问题方便,称一个矩形被分割为r个矩形,且这r个矩形的$2r$个边长互异的分割为矩形的r-阶边长互异矩形分割.在矩形的r-阶边长互异矩形分割中,共分割出r个矩形.考察这r个矩形的顶点,除有4个是原矩形的顶点外,剩下的顶点(称为新顶点)可以分为两类:

其中作为某个矩形的边的内点的新顶点称为第一类顶点，作为某4个矩形的公共顶点的新顶点称为第二类顶点.

引理1 设矩形的 r－阶边长互异矩形分割中有 p 个第一类顶点，q 个第二类顶点，则 $p+2q=2r-2$.

证：记矩形的 r－阶边长互异矩形分割中 r 个矩形的内角和为 J. 易知，每个第一类顶点对 J 的贡献为 $180°$，每个第二类顶点对 J 的贡献为 $360°$. 所以，

$J=360°$（原矩形的内角和）$+p\times180°$（第一类顶点对 J 的贡献）$+q\times360°$（第二类顶点对 J 的贡献）.

另一方面，$J=r\times360°$. 所以 $360°+p\times180°+q\times360°=r\times360°$，即 $p+2q=2r-2$. 证毕.

引理2 若矩形存在 r－阶边长互异矩形分割，则 $r\geqslant5$.

证：用反证法.

(1)若 $r=2$，则由引理1，有 $p+2q=2$，所以 $p+q\leqslant2$. 于是，原矩形至少有一条边上没有新顶点，即分割中存在一个以原矩形的边为边长的矩形，从而矩形分割本质上只有如图14所示的一种方式. 但它不是边长互异矩形分割，矛盾.

(2)若 $r=3$，则由引理1，有 $p+2q=4$，所以 $p\leqslant4$，$q\leqslant2$.

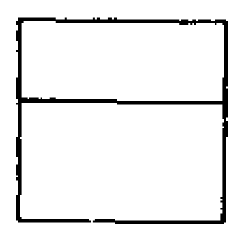


图 14

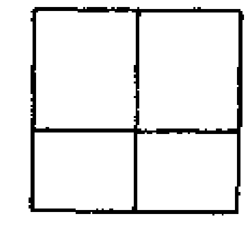


图 15

若原矩形的每条边上都有新顶点，则 $p=4$，$q=0$. 此时，原矩形边上的新顶点只能与其对边上的新顶点连线（图15），必分割出4个小矩形，与 $r=3$ 矛盾. 于是原矩形至少有一条边上没有新顶点，即分割中存在一个以原矩形的边为边长的矩形. 剩下的部分也是一个矩形，此矩形须进行2－阶边长互异矩形分割，

由(1),这是不可能的.

(3)若 $r=4$,则由引理 1,有 $p+2q=6$,所以 $p\leqslant 6, q\leqslant 3$.

若原矩形的每条边上都有新顶点,则 $p\geqslant 4, q\leqslant 1$. 当 $p=4$ 时,$q=1$. 此时,原矩形边上的新顶点只能与内部的一个第二类顶点连线,必出现图 16 所示的分割. 但此分割不是边长互异的分割,矛盾;当 $p=5$ 时,$2q=6-p=1$,矛盾;当 $p=6$ 时,$q=0$. 此时,在原矩形边上各取一个新顶点,记为 M, N, P, Q. 考察其中每一个点引出的边. 由于不存在第二类新顶点,引出的每一条边都必须与一个矩形的边相交. 若有一条引出的边与原矩形的边相交,则原矩形被分割为两个小矩形,其中至少有一个矩形要进行 t - 阶($2\leqslant t\leqslant 3$)边长互异矩形分割. 由(1)和(2),这不可能. 于是每一条引出的边必与一个分割矩形的边相交,且引出的不同的边必须与不同的边相交(否则出现前面所述情形或分割出来的矩形个数多于 4). 这样,原矩形内部至少有一个分割出来的矩形. 又原矩形的 4 个直角属于 4 个不同的矩形,从而至少分割出 5 个矩形,矛盾.

若原矩形至少有一条边上没有新顶点,则分割中存在一个以原矩形的边为边长的矩形,剩下的部分(矩形)须进行 t - 阶($2\leqslant t\leqslant 3$)边长互异矩形分割,由(1)和(2),这不可能.

综上所述,引理 2 获证.

引理 3 矩形的 5 - 阶边长互异矩形分割方式本质上(不考虑分割出来的矩形的大小,只考虑相对位置关系)是唯一的.

证:由引理 1,有 $p+2q=8$,所以 $p\leqslant 8, q\leqslant 4$.

若原矩形至少有一条边上没有新顶点,则分割中存在一个以原矩形的边为边长的矩形,剩下的部分(矩形)须进行 t -

阶$(2\leqslant t\leqslant 4)$边长互异矩形分割.由引理2,这不可能.于是原矩形的每条边上都有新顶点,所以$p\geqslant 4,q\leqslant 2$.

若$q=2$,设此两个第二类顶点为A,B.若AB不平行矩形的边,则A,B都引出一个"十字"形分割线,它们互不共线(图16),与5阶分割矛盾.若AB平行矩形的边,则A,B都引出一个"十字"形分割线,其中有两条分割线重合(图17),亦与5阶分割矛盾.

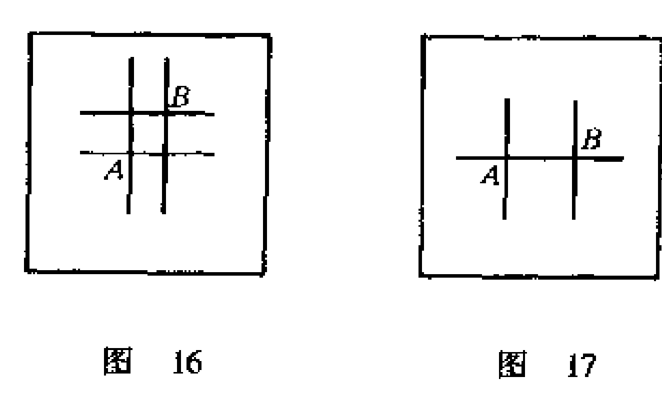


图 16　　　　图 17

若$q=1$,设此第二类新顶点为A,则A引出的一个"十字"形分割线中每一条都与另外的分割线相交,得4个矩形(图18).这4个矩形中至少有两个是分割出来的矩形,从而分割不是边长互异的分割,矛盾.所以$q=0,p=8$.

考察原矩形边上的一个新顶点P,若P与棋盘的对边相交,则棋盘被分割为两个小矩形,其中至少有一个矩形要进行t-阶$(2\leqslant t\leqslant 4)$边长互异矩形分割.由引理2,这不可能.所以$P$必与原矩形内的一个新顶点$P'$连线.同样,矩形其他边上的新顶点$Q,M,N$都分别与原矩形内的一个新顶点$Q',M',N'$连线,得唯一的分割形式如图19所示.引理3获证.

定理2　最小的连续数为5.

证:设r是一个连续数.一方面,由于棋盘的r-阶连续覆盖是相应矩形的r-阶边长互异矩形分割,由引理2,有r

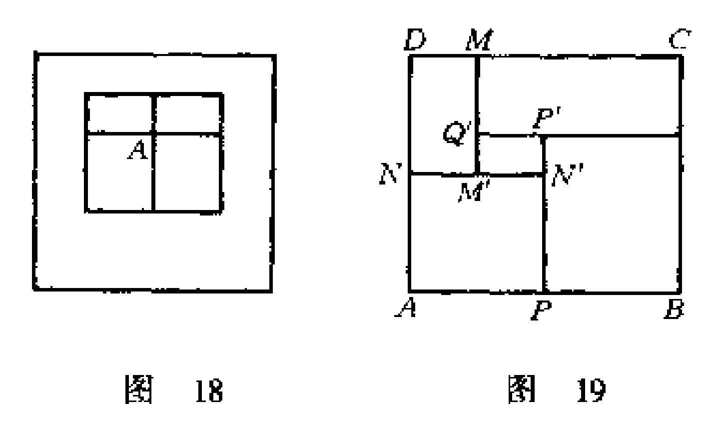


图 18　　　　图 19

$\geqslant 5$. 另一方面,图 20 便是一个 5 阶的连续棋盘,定理 2 获证.

除图 20 所示的 5 阶连续棋盘外,是否存在其他 5 阶连续棋盘? 共有多少个 5 阶连续棋盘? 下面的定理回答了这一问题.

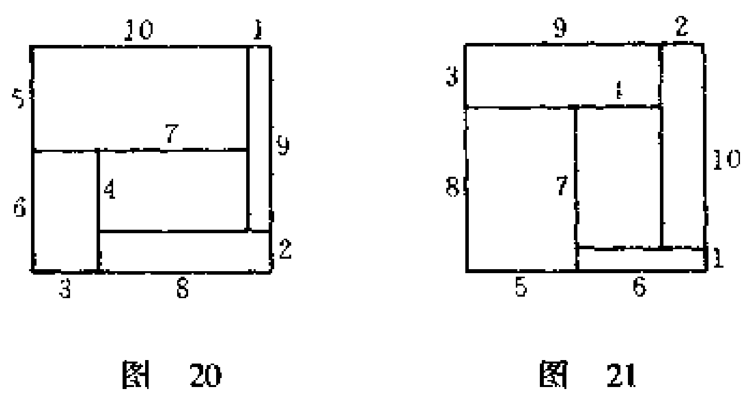


图 20　　　　图 21

定理 3　恰有 2 个 5 阶的连续棋盘,其边长分别为 11 和 13. 且对每一个 5 阶连续棋盘,都恰有两种不同的连续分割.

证:考察任意一个 5 阶连续棋盘. 用$[a,b]$表示覆盖中边长为 a,b 的一个矩形. 设棋盘的 5 阶连续覆盖中的矩形分别为:$[a_1,a_2]$,$[a_3,a_4]$,$\cdots$,$[a_9,a_{10}]$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$是 1, 2,$\cdots$,10 的一个排列. 考察正方形棋盘的面积 S,有

$$S=a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_9a_{10}.$$

下面证明:$1\times10+2\times9+3\times8+4\times7+5\times6\leqslant S\leqslant1\times2+3\times4+5\times6+7\times8+9\times10$,即 $110\leqslant S\leqslant190$.

我们只证明不等式的右边，左边类似可证.

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 只有有限种排列，所以 $S = a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_9a_{10}$ 必有最大值. 若在 S 的表达式中，1 不与 2 相乘，不妨设 S 中有 $1 \times a_1, 2 \times a_2$ 这两项，则将它们换作 1×2 与 $a_1 \times a_2$，相应的和记为 S'，则

$$S' - S = (1 \times 2 + a_1 \times a_2) - (1 \times a_1 + 2 \times a_2)$$
$$= 2 + a_1a_2 - a_1 - 2a_2 = (a_1 - 2)(a_2 - 1) \geqslant 0.$$

所以，调整后 S 增大，矛盾. 所以 1 必与 2 相乘. 再对剩下的数作类似的讨论，有 3 与 4 相乘，5 与 6 相乘，…，9 与 10 相乘，不等式获证.

注意到 S 为平方数，所以 S 只有三种取值：121，144，169.

当 $S = 121$ 时，棋盘的边长为 11. 由引理 3，棋盘本质上只有唯一的覆盖形式如图 19 所示. 设其中 $M'N' = a, N'P' = b, ND = x, MD = y$. 当确定了 a, b, x, y 之值后，分割唯一确定. 实际上，$AP = y + a, BP = 11 - y - a, AM = 11 - x, CM = 11 - y, CQ = x - b, BQ = 11 + b - x$. 由此不难得到边长为 11 的连续棋盘只有两种不同的连续分割. 其中一个如图 20 所示，另一个如图 21 所示.

当 $S = 144, 169$ 时，利用类似的讨论，可发现另一个连续棋盘的边长为 13，其两种不同的连续分割如图 22，图 23 所示.

是否存在其他连续数？如何找到其他连续数？这些都请读者自己思考.

棋盘的覆盖是一个容量很大，且有相当大的难度的研究课题. 本章中，我们给出的仅是一些初步的结果，希望读者能作更深入的研究.

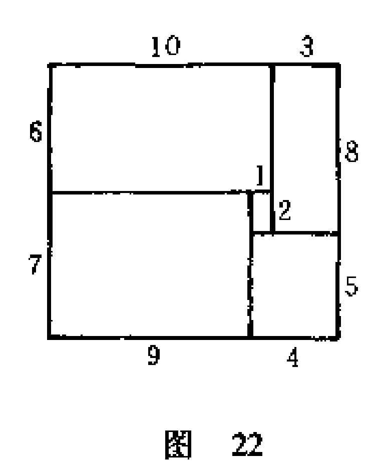


图 22

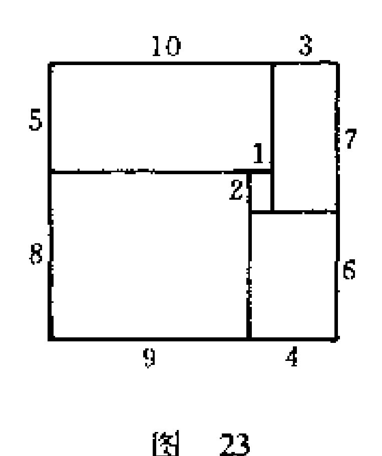
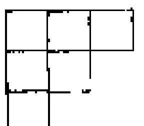


图 23

习 题 一



(第 1 题图)

1. 用若干个形如右图的覆盖形完全覆盖 $m\times n$ 棋盘,求证:$12|mn$.

2. 在 9×9 棋盘中,将格 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$分别填上 A,B,C,D.然后对棋盘的其他各格填字母,使每行每列都是周期为 2 的字母序列.用 27 个 3 - L 形完全覆盖 9×9 棋盘.求证:这些 3 - L 形的内顶格共盖住了 11 个 A,2 个 D,7 个 B 和 7 个 C.

3. 求证:$n\times n$ 棋盘存在 4 - T 形完全覆盖的充分必要条件是:$4|n$.

4. 在 $m\times n$ 棋盘的 3 - L 形完全覆盖中,形如"┌"和形如"┘"的 3 - L 形的个数之差为 3 的倍数.

5. 取定 1993×1993 棋盘中同一条边界上的两个方格 A 和 B,使 A,B 之间隔着奇数个方格.用 1×2 矩形覆盖棋盘,使棋盘剩下一个方格没有被覆盖.求证:其中不覆盖格 A 的方法数与不覆盖格 B 的方法数相等.

6. 对任何一个正方形棋盘,称它四周的一些方格形成的一个图形叫做一个边框.求证:恰好存在一种方式,用 50 个互不相交的边框(大小可以不同)完全覆盖 100×100 棋盘.

7. 求证:$4m\times n$ 棋盘不能用一个 2×2 矩形和若干个 1×4 矩形完

全覆盖.

8. 求证:$4m\times n$ 棋盘不能用一个 $3-L$ 形和若干个 1×4 矩形完全覆盖.

9. 若 $m\times n$ 棋盘能用 1×4 矩形完全覆盖,问此 $m\times n$ 棋盘能否用一个 2×2 矩形和若干个 1×4 矩形完全覆盖?

10. 若 $m\times n$ 棋盘能用一个 1×1 正方形和若干个 $3-L$ 形完全覆盖,问此 $m\times n$ 棋盘能否用一个 2×2 正方形和若干个 $3-L$ 形完全覆盖?

11. 在 8×8 棋盘中剪去左上角的一个方格,求证:剩下的残缺棋盘不能用 21 个 1×3 矩形覆盖.

12. 8×8 棋盘能否用 15 个 $4-T$ 形和一个 2×2 正方形完全覆盖?

13. 求证:当 $m,n\geqslant18$ 时,所有 $m\times n$ 棋盘都能用若干个 3×3,3×10,10×10 矩形完全覆盖.

14. 用 1×1,2×2,3×3 三种正方形完全覆盖 23×23 棋盘.问:其中 1×1 正方形至少要多少个?

15. 用 1×6 矩形和 1×7 矩形共 k 个完全覆盖 11×12 棋盘,求证:当 $k=20$ 时,这项工作可以完成,而当 $k=19$ 时,这项工作不能完成.

16. 在 8×8 的棋盘中去掉哪个格,使剩下的残缺棋盘能用 1×3 的矩形覆盖?哪些 $m\times n-1$ 棋盘可用 1×3 的矩形覆盖?

17. 求 8×8 的棋盘内 2×2 正方形饱和覆盖中覆盖形个数的最小值.

18. 在 100×100 棋盘的 $4-T$ 形饱和覆盖 P 中,求 $4-T$ 形个数的最小值.

19. 在 $2n\times2n$ 棋盘的 $4-T$ 形饱和覆盖 P 中,求 $4-T$ 形个数的最小值.

20. 在 8×8 棋盘的 $3-L$ 形饱和覆盖 P 中,求 $|P|$ 的最小值.

21. 在 100×100 棋盘中,覆盖了 800 个 $4-T$ 形,求证:此覆盖不是饱和覆盖.

22. 在 $n\times n$ 棋盘中,任意 p 行和任意 q 列交叉位置的 pq 个格按原来顺序排成的 $p\times q$ 矩形称为棋盘的一个 $p\times q$ 子式,并称该子式的半

周长为 $p+q$. 今知若干个半周长均不小于 n 的子式盖住了棋盘的主对角线. 求证: 这些子式至少盖住棋盘的一半方格.

23. 用直径为$\sqrt{2}$的圆覆盖 7×7 棋盘. 问至少要多少个圆, 才能使每个方格都至少有一个点被覆盖?

24. 求证: $4\times n$ 棋盘存在不含子覆盖的 $3-L$ 形的完全覆盖的充要条件是 $n=6$.

25. 6×8 棋盘是否存在不含子覆盖的 $3-L$ 形的完全覆盖?

26. 是否存在自然数 m,n, 使在 $m\times n$ 棋盘的 $3-L$ 形完全覆盖中, 任何两个 $3-L$ 形不构成 2×3 矩形, 且任何点处都没有多于 3 个 $3-L$形相接?

27. 作出一个 55×57 棋盘的互异正方形覆盖.

28. 8×8 棋盘是否存在互异的 $3-L$ 形的完全覆盖?

29. 对哪些自然数 m,n, $m\times n$ 棋盘存在互异 $3-L$ 形完全覆盖?

30. 对哪些自然数 m,n, $m\times n$ 棋盘存在全异 L 形完全覆盖?

31. 能否在 8×8 棋盘的方格中填入 $1,2,\cdots,64$, 每格填一个数, 各个方格的数不同, 使棋盘中任何 $4-T$ 形覆盖的各数之和被 4 整除? 若对 $4-Z$ 形呢?

第二章 棋盘的布局

所谓布局，是指在棋盘上放置若干枚棋，使这些棋按照各自的行走规则移动时，棋盘上发生或不发生某种现象.这样的一种布子方法称为棋盘的一种布局.

这类问题的处理方法通常有：

(1)从棋子入手.它包括两个方面——一是每个棋子的最优功能，即每个棋子至多控制多少个格，至少控制多少个格；二是考察棋盘中有棋子最多的行或列.

(2)从棋盘入手.即将棋盘划分为若干块，由局部性质(局部中棋子的个数，局部中棋子的位置特点等)，导出整体性质.

在上述两个方法中，一个常用的技巧是：找“最优”的子集或最大的“坏”子集.所谓“最优”，就是所放棋子数与子棋盘的格子数的比值最大或最小；所谓“坏”子集，就是这个子集中的任何两个元素之间的关系都具有某个与题设要求相反的性质，而“最大”就是子集中的元素个数最多.

为方便起见，我们用 Q 表示一只棋，用 D,H,X,M,J,Z 分别表示象棋中的帝，后，象，马，车，卒.其中，除卒外，所有棋子都是指国际象棋.其行走规则为：帝可从一格运动到与之有公共点的一个格；后可从一格运动到与之同行，或同列，或同 $45°$ 或 $135°$ 斜线的一个格；象可从一格运动到与之同 $45°$ 或 $135°$ 斜线的一个格；马可从一格运动到以此格为角格的一个 2×3 矩形的相对角上的一个格；车可从一格运动到与之同行，或同列的一个格；卒可从一格运动到与之有公共边的一个格.

并约定，棋都放在棋盘的方格中．这一约定，并不影响中国象棋盘中的布局．实际上，中国象棋盘上放子的结点可看作方格的中心．

2.1 控制性布局

控制性布局，是棋盘中的一种常见布局，它是用若干枚棋来控制棋盘．

定义 1 在 $m\times n$ 棋盘中，称一只棋 Q 控制住了一个方格 a，如果方格 a 中有一只棋 Q，或者一只棋 Q 按其行走规则移动一步即可到达格 a．

一只棋 Q 从棋盘上的某个方格出发，走一步可以到达的格的个数（不包括它本身所在的格），称为棋 Q 的控制数；棋 Q 走第 r 步可以到达的格的个数，称为棋 Q 的 r－控制数．

对于棋 Q 的 r－控制数，我们有如下定理：

定理 1 在无限大的棋盘上，马的 r－控制数 $M(r)$ 满足：

$M(r)=8$（若 $r=1$）；

$M(r)=33$（若 $r=2$）；

$M(r)=7r^2+4r+1$（若 $r\geqslant 3$）．

此定理的证明留给读者完成．

定义 2 在 $m\times n$ 棋盘中放若干只棋，若对棋盘中的任何一个格，都至少被其中的一只棋所控制，则称这些棋控制了该棋盘．

在棋盘的控制中，放置在棋盘上的棋可以是同一类型的，比如用若干只马控制棋盘，用若干只车控制棋盘等；也可以是不同类型的，比如同时用若干只马和若干只车控制棋盘．这里我们仅研究棋盘的同一类型的棋的控制．同一类型的棋 Q 对

棋盘的控制简称为棋盘的 Q 控制，如棋盘的马控制，棋盘的车控制等.

定义 3 在 $m\times n$ 棋盘的 Q 控制中，所需要的棋 Q 的最少个数称为 $m\times n$ 棋盘的 Q 控制数，记为 $QK(m,n)$. 比如，$m\times n$ 棋盘的马控制数，车控制数可记为 $MK(m,n)$，$JK(m,n)$.

下面来讨论棋盘控制中的若干问题.

问题 1 求 $m\times n$ 棋盘中的马控制数 $MK(m,n)$.

这是一个容量相当大的问题，至今还没有解决，即使是 $m=n$ 的特殊情形，我们也只得到了少数几个结果. 易知，$MK(1,1)=1$，$MK(2,2)=MK(3,3)=MK(4,4)=4$. 其达到最小值时的布局见下面的图 1～图 5(详细证明留给读者完成).

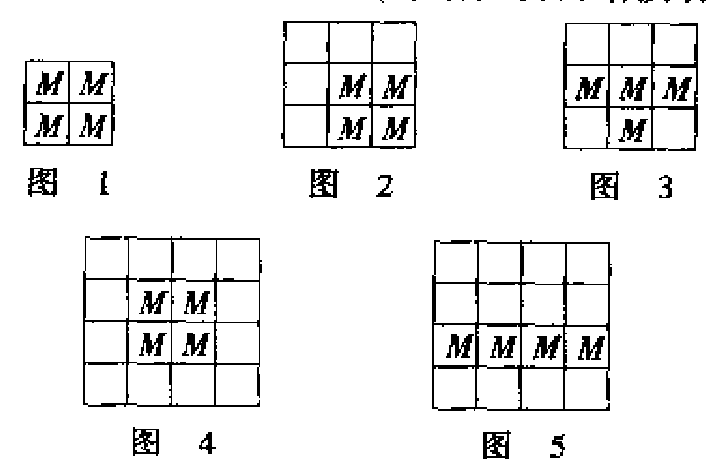


图 1　图 2　图 3

图 4　图 5

现在求 $MK(5,5)$.

对于 5×5 棋盘，将其格染黑色和白色两种颜色，使任何相邻(有公共边)的格异色，不妨设四角上的格为黑色，那么，棋盘中的棋子具有如下特点：

(1)白色的马(放在白色格上的马)控制黑色的格，而且一个黑格被控制，只能是该格上有马，或被一只白色的马控制. 同样，黑色的马(放在黑色格上的马)控制白色的格，而

且一个白格被控制，只能是该格上有马，或被一只黑色的马控制.

(2)白色的马最多控制6个黑色的格，黑色的马最多控制8个白色的格.

(3)两只白色的马最多控制10个黑色的格.

其中(1)，(2)是显然的，我们只证明(3).

将白色的马分为两类：位于边界格中的马称为A类马，位于非边界格中的马称为B类马.显然，A类马最多控制3个黑色的格.B类马最多控制6个黑色的格.对任何两只白色马，如果一只是A类马，另一只是B类马，则它们最多控制9个格；若两只同为A类，则它们共控制6个黑色的格；若两只马都是B类，则它们有两个公共控制的格，从而最多控制了10个互异的格.

有了以上一些结果，便不难求出$MK(5,5)$.首先，可以在棋盘中适当放5只马控制住棋盘(图6，图7).

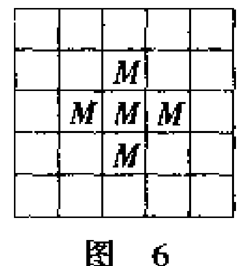


图 6

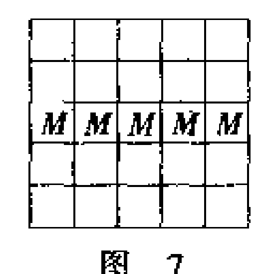


图 7

由于一只白色的马控制住的黑格较一只黑色的马控制住的白格要少，从而立足于考察控制住棋盘中的黑格至少要多少只白马.引入参数：设棋盘中共有r只马，其中有k只白马.

(i)若$k=4$，则4个白色的格上有马，还有8个白色的格上无马，这8个白色的格至少要一个黑色的马控制.所以，$r\geqslant 4+1=5$.

（ⅱ）若 $k=3$，则 3 个白色的格上有马，还有 9 个白色的格上无马，这 9 个白色的格至少要 2 个黑色的马控制. 所以，$r\geqslant 3+2=5$.

（ⅲ）若 $k=2$，则 2 只白色马最多控制 10 个黑色的格，还有 3 个黑色的格未被控制，这 3 个黑色的格上都要放马，需要 3 只马，所以，$r\geqslant 2+3=5$.

（Ⅳ）若 $k=1$，则 1 只白色马最多控制 6 个黑色的格，还有 7 个黑色的格未被控制，这 7 个黑色的格上都要放马，需要 7 只马，所以，$r\geqslant 1+7=8$.

（Ⅴ）若 $k=0$，则 13 个黑色的格上都要放马，需要 13 只马，所以，$r\geqslant 13$.

综上所述，不论哪种情形，都有 $r\geqslant 5$.

如图 6 或图 7，$r=5$ 是可能的，放 $r_{\min}=5$，即 $KM(5,5)=5$.

对于 $KM(n,n)$，由于一只马最多控制 9 个格，从而有如下估计：$KM(n,n)\geqslant\frac{n^2}{9}$. 但此估计过于粗糙，求出较为精确的估计是我们所企盼的，希望读者经过自己的努力获得较好的结果. 建议大家不妨从研究 $KM(6,6)$，$KM(7,7)$，$KM(8,8)$入手，看能否发现某种规律.

问题 2 $n\times n$ 棋盘上有 p 只马控制住了棋盘，且去掉任何一只马后不再控制住棋盘，求 p 的最大值 p_n.

此题的难度比问题 1 毫不逊色，留给读者研究. 图 8，图 9 给出的是两个最初的结果：$p_3=5$，$p_4=8$.

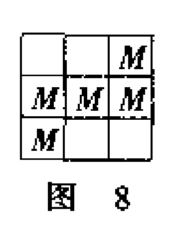


图 8

M	M		M
M			
			M
M		M	M

图 9

问题 3　$n\times n(n>1)$棋盘上有 q 只马,它们未控制住棋盘,求 q 的最大值 q_n.

此问题已彻底解决,即有下面的命题:

命题 1　$n\times n(n>1)$棋盘上有 q 只马,它们未控制住棋盘,则 q 的最大值为:

$$q_n=\begin{cases}n^2-1,(n\leqslant 3)\\ n^2-3.(n\geqslant 4)\end{cases}$$

证:当 $n=2$ 时,$q\leqslant 2^2-1=3$. 当 $n=3$ 时,$q\leqslant 3^2-1=8$. 图 10~图 11 分别是 $q=3,q=8$ 时的布局.

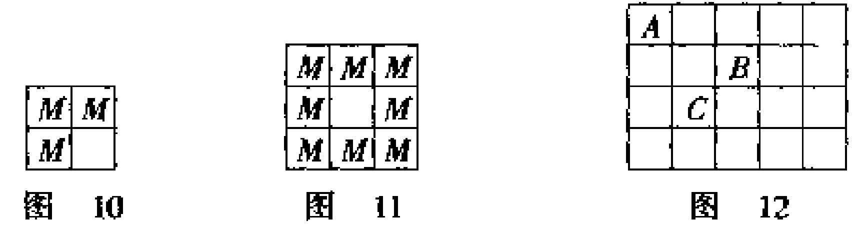


图　10　　图　11　　图　12

当 $n\geqslant 4$ 时,由于棋盘未被控制,则至少有一个空格(即未放马的格)A 未被控制. 注意到至少有两个互异的格 B、C 上的马可以控制 A(图 12),从面至少有两个非 A 的格 B,C 上未放马,即空格的个数不少于 $1+2=3$. 所以,$q\leqslant n^2-3$. 另一方面,如图 12,设 A,B,C 都是空格,其他的格都放一只马,则棋盘未被控制,此时 $q=n^2-3$.

所以
$$q_n=\begin{cases}n^2-1,(n\leqslant 3)\\ n^2-3.(n\geqslant 4)\end{cases}$$

问题 4　求 $m\times n$ 棋盘中的后控制数 $HK(m,n)$

这也是一个容量相当大的问题,对 $m=n$ 的特殊情形,我们也只得到了少数几个结果. 易知,$HK(1,1)=HK(2,2)=HK(3,3)=1$,$HK(4,4)=2$,$HK(5,5)=3$,$HK(6,6)=4$,$HK(7,7)=HK(8,8)=HK(9,9)=HK(10,10)=HK(11,11)=5$. 其达到最小值时的布局见下面的图 13~图 19(详细证明留给读者完成).

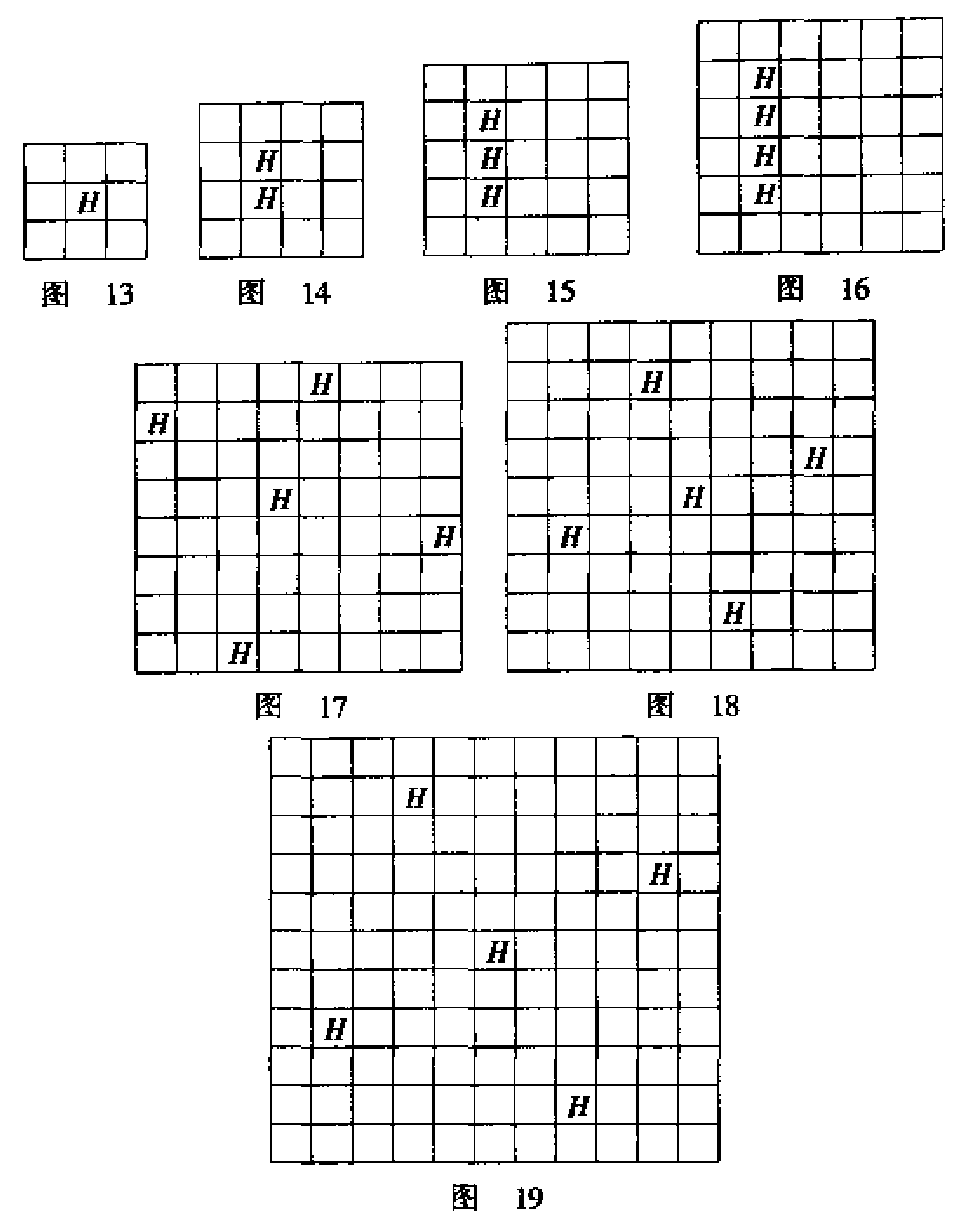


图 13　　图 14　　图 15　　图 16

图 17　　图 18

图 19

问题 5　求 $m \times n$ 棋盘中的帝控制数 $DK(m,n)$.

此问题的一个特殊情形是如下的命题:

命题 2　$n \times n$ 棋盘上的帝控制数 $DK(n,n)=\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$.

此命题的证明较易,留给读者完成.

问题 6 求 $m \times n$ 棋盘中的象控制数 $XK(m,n)$.

此问题的一个特殊情形是如下命题:

命题 3 $n \times n$ 棋盘上的象控制数 $XK(n,n)=n$.

证:首先,在棋盘的第$\left[\frac{n+1}{2}\right]$行中的每个格中放一只象,它们控制住了棋盘.其次,当 n 为偶数时,设 $n=2k$.将棋盘的格 2-染色,使相邻的格不同色,则棋盘边界上的 $4(2k-1)$ 个格中,黑格和白格的个数都是 $4k-2$.若棋盘中只放有 $n-1=2k-1$ 只象,则黑象(放在黑格中的象)的个数与白象(放在白格中的象)的个数中至少有一个不大于 $k-1$.不妨设有不多于 $k-1$ 只黑象.由于每只象只能控制棋盘边界上的 4 个格,且黑象只能控制黑格,从而 $k-1$ 只黑象最多控制棋盘边界上的 $3k-3$ 只黑格,但边界上的黑格个数 $4k-2>3k-3$,矛盾.

当 n 为奇数时,令 $n=2k+1$.

(1)若 $k=2t$,即 $n=4t+1$.假设棋盘中只放有 $n-1=2k$ 只象,同样考察棋盘边界上的 $4k$ 个黑格和 $4k$ 个白格.因为每只象至多控制其中的 4 个格,所以 $2k$ 只象中必有 k 只白象和 k 只黑象.因为棋盘上有 $2k+1$ 条斜线全由黑格组成,中间的一条是棋盘的对角线,此对角线上有 $n=4t+1$ 个黑格,靠近它的两条斜线上各有 $4t-1$ 个黑格,其外侧的两条斜线上有 $4t-3$ 个黑格,t 次以后外侧的两条斜线上各有 $2t+1$ 个黑格.由于只有 $k=2t$ 只黑象, 这 $2t+1$ 条斜线中至少有一条上没有黑象. 但每个不在这条斜线上的黑象至多控制这条斜线上的一个黑格, 此斜线上至少有一个黑格未被控制,矛盾.

(2)若 $k=2t+1$,即 $n=4t+3$.假设棋盘中只放有 $n-1$

$=2k$ 只象，同样考察棋盘边界上的 $4k$ 个黑格和 $4k$ 个白格，$2k$ 只象中必有 k 只白象和 k 只黑象. 因为棋盘上有 $k+1$ 条斜线全由白格组成，中间有两条上各有 $n-1=4t+2$ 个白格，靠近它们两侧的两条斜线上各有 $4t$ 个白格，再其外侧的两条斜线上各有 $4t-2$ 个白格，t 次以后外侧的两条斜线上各有 $2t+2$ 个黑格 由于只有 $k=2t+1$ 只白象，这 $2t+2$ 条斜线中至少有一条上没有白象，但每个不在这条斜线上的白象至多控制这条斜线上的一个白格，此斜线上至少有一个白格未被控制，矛盾.

综上所述，命题获证.

2.2 相容性布局

在棋盘上放有若干只同类型的棋，若其中任何两只棋都互不相吃，则称此布局是相容的.

在 $m\times n$ 棋盘的相容布局中可放置的棋 Q 的最多个数称为棋 Q 的相容数，记为 $QR(m,n)$. 比如棋盘中马、车的相容数可分别记为 $MR(m,n)$，$JR(m,n)$.

问题 1 求 $m\times n$ 棋盘上的马相容数 $MR(m,n)$.

此问题暂无结果，请读者自己探索. 但我们有如下的猜想：当 $m,n>3$ 时，$MR(m,n)=\left[\frac{mn+1}{2}\right]$.

要证明此猜想，解题过程中似乎应对 m,n 进行模 4 分类. 此猜想在 $m=n$ 时是成立的，即有如下命题：

命题 1 当 $n>3$ 时，$n\times n$ 棋盘上的马相容数 $MR(n,n)=\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$.

证：我们只对 $n=8$ 的情形给出证明，将一般情形的证明

留给读者.先考察一个较小的棋盘,比如 2×2 棋盘.此棋盘中可以放4只马,这显然不是最优的.再看 2×3 棋盘,可以放4只马,其中有两只马分别控制了一个空格,另两只马都没有控制其他的格,从而仍不是最优的(有两只马浪费了).再考察 2×4 棋盘,8个格可以分成4组,每一组中两个格,这两个格上的马互吃,从而每一组格中至多放一只马.又每一组格中可以放一只马,从而此棋盘上最多可以放4只马,每只马都控制了一个空格.此棋盘是最优的,因为没有"浪费"马.

对于 8×8 棋盘,将之划分为8个 2×4 棋盘.每个 2×4 棋盘至多可以放4只马,从而 8×8 棋盘上至多可以放 $8\times4=32$ 只马.又在32个白色格上都分别放一只马,它们互不相吃,所以 $MR(8,8)=32$.

问题2 求 $m\times n$ 棋盘上的帝相容数 $DR(m,n)$.

此问题没有彻底解决,但我们有如下命题:

命题2 $n\times n$ 棋盘上的帝相容数为:

$$DR(n,n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4},(n\text{ 为偶数})\\[2mm] \dfrac{(n+1)^2}{4}.(n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

证:考察任意一个 2×2 棋盘(最优子集),其中最多一只帝.

若 n 为偶数,设 $n=2k$.将棋盘划分为 k^2 个 2×2 棋盘,由于每个 2×2 棋盘中至多一个帝,所以,$n\times n$ 棋盘中至多有 $k^2=\dfrac{n^2}{4}$ 只帝.另一方面,取 $n\times n$ 棋盘的奇数行和奇数列交叉的 $\dfrac{n^2}{4}$ 个格放帝,可知放 $\dfrac{n^2}{4}$ 只帝是可能的.故 r 的最大值为 $\dfrac{n^2}{4}$.

若 n 为奇数,设 $n=2k+1$,考察棋盘的左上角的 $2k\times2k$

棋盘.由上面的讨论,此子棋盘中至多放有 k^2 只帝.而最后一行与最后一列都最多放 $k+1$ 只帝,但当它们都放 $k+1$ 只帝时,只能每间一个格放一只帝,且首尾两个格都放有帝.于是,最后一行与最后一列有一只公共的帝,即它们中共放 $2k+1$ 只帝.所以,

$$DR(m,n)\leqslant k^2+2k+1=(k+1)^2=\frac{(n+1)^2}{4}.$$

另外,在 $n\times n$ 棋盘的奇数行与奇数列交叉的位置上放帝,则共放了 $\frac{(n+1)^2}{4}$ 只帝.

综上所述, $DR(m,n)=\begin{cases}\frac{n^2}{4},(n\text{ 为偶数})\\ \frac{(n+1)^2}{4}.(n\text{ 为奇数})\end{cases}$

注:本题若改为环形棋盘,则难度大得多,答案为 $\left[\frac{n}{2}\left[\frac{n}{2}\right]\right]$.

问题 3 求 $m\times n$ 棋盘上的后相容数 $HR(m,n)$.

此问题没有彻底解决,但我们有如下命题:

命题 3 $n\times n$ 棋盘上的后相容数 $HR(n,n)$ 满足:

(1) $HR(n,n)=1$(若 $n=1$ 或 2);

(2) $HR(n,n)=2$(若 $n=3$);

(3) $HR(n,n)=n$(若 $n\geqslant 4$).

此结论的证明留给读者.

在棋盘的相容性布局中，还可以讨论不同布局的方法数. 比如，大数学家高斯(C. F. Gauss, 1777 – 1855)就曾讨论过 8×8 棋盘上后的相容布局的计数问题，他猜想不同的布局有 76 种，但实际上人们后来证明，所有不同的布局共有

92 种．注意到 $HR(8,8)=8$，棋盘中的 8 只后不同行不同列，可用一个长为 8 的数字排列 $(i_1 i_2 \cdots i_8)$ 表示一种布局，其中第 k 个数表示第 k 列中的后所在的行数 $(k=1,2,\cdots,8)$．若干不同的布局如下所示：

(72631485)(35841726)(16837425)(57413862)(41863157)

(36815724)(63185247)(25741863)

有兴趣的读者可自己试着补全其他布局．

相容性布局的一个推广是"k－攻击"布局．即棋盘上放置若干只同类的棋，使每只棋都恰好可以对其中的 k 只棋进行攻击．显然，前述相容性布局即"0－攻击"布局．

"k－攻击"布局最早由美国的数学家们提出．1980 年，美国"数学消遣"杂志第一期刊登了如下的一个问题：

在 8×8 棋盘上最多可以放置多少只皇后，使每一只都恰好能对其中的 k 只进行攻击？

显然，每只皇后只能攻击与它在同一行，同一列，同一左斜对角线，同一右斜对角线上的皇后，而且在同一行（列，左斜对角线，右斜对角线）上至多攻击到 2 只皇后，所以 $k\leqslant8$．

易知 $k\neq8$．进一步讨论可知 $k<5$．实际上，考察棋盘上位于最左边的有皇后的一列，设此列的皇后中位于最上一行的皇后为 A，则皇后 A 的上方，左方，左上方，左下方都没有皇后，所以 A 最多能攻击到它下方，右方，右上方，右下方各一只皇后，即最多攻击到 4 只皇后，所以 $k<5$．

设 8×8 棋盘的"k－攻击"布局中皇后个数的最大值为 $HG(k)$．显然 $HG(0)=HR(8,8)=8$，对 $k\neq0$，如何求出 $HG(k)$？

1981 年，斯科特·基姆在"数学消遣"上发表了他得到的两个最初结果：$HG(1)=10$（图 1），$HG(2)=14$（图 2）．

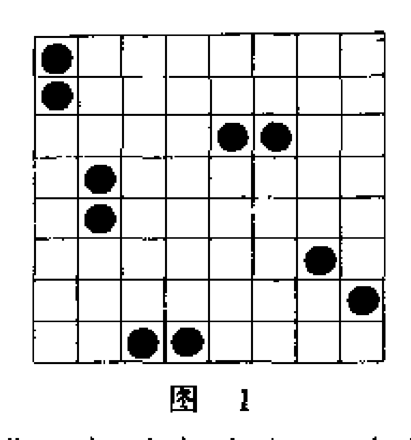


图 1

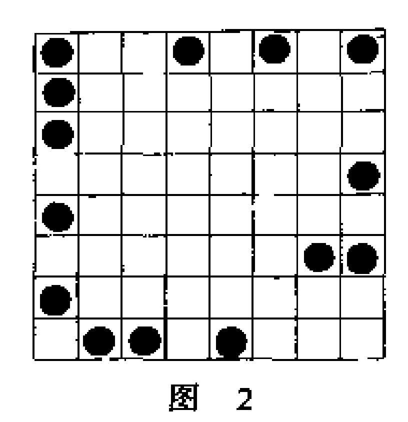


图 2

进一步，人们发现 $HG(k)$满足不等式：$HG(k) \leqslant 92/(8-k)$. 实际上，8×8 棋盘中共有 8 条横向直线，8 条纵向直线，15 条左斜对角线，15 条右斜对角线. 设这 46 条直线中有 $r(k)$条直线上放了皇后（$r(k) \leqslant 46$），注意到棋盘中放有 $HG(k)$只皇后，每只皇后都在横，纵，左斜，右斜 4 条直线上，所以棋盘上有 $4HG(k)$条直线上放了皇后. 但每只皇后可以攻击 k 只皇后，意味着这只皇后分别与 k 只皇后在同一条直线上. 于是，所有 $HG(k)$只皇后可得到 $k \cdot HG(k)$条直线. 但其中每条直线上都至少有两只皇后，被计数两次，所以这样的直线至多有 $k \cdot HG(k)/2$ 条. 于是

$$r(k) \geqslant 4HG(k) - k \cdot HG(k)/2.$$

即

$$8HG(k) - k \cdot HG(k) \leqslant 2r(k).$$

又 $k<5$，所以 $HG(k) \leqslant 2r(k)/(8-k)$.（$*$）

注意到 $r(k) \leqslant 46$，所以由（$*$）式得 $HG(k) \leqslant 2r(k)/(8-k) \leqslant 92/(8-k)$.

所以，当 $k=3$ 时，$HG(3) \leqslant 92/(8-3) = 92/5 < 19$，即 $HG(3) \leqslant 18$.

当 $k=4$ 时，棋盘的 4 个角上的方格不能放皇后，因为这样的格上的皇后至多可以攻击 3 只皇后，于是，仅含角上方格

的 4 条左斜(或右斜)对角线上没有皇后,即 $r(4) \leqslant 46-4=42$. 于是,由(*)式得

$$HG(4) \leqslant 2r(4)/(8-4) \leqslant 2 \times 42/4 = 21.$$

由此,人们猜想 $HG(3)=18, HG(4)=21$.

"科学美国人"杂志在 1981 年也公布了 $k=3$ 时放 16 只皇后和 $k=4$ 时放 20 只皇后的布子方案,但这并没有求出 $HG(3)$ 和 $HG(4)$,因为没有证明 $HG(3) \leqslant 16, HG(4) \leqslant 20$. 直到 1985 年,终于由前苏联的数学家们找到了棋盘上放置 18 及 21 只皇后的具体方法(图 3,图 4),从而证明了 $HG(3)=18$, $HG(4)=21$,使这一问题得到彻底的解决. 据说他们在寻找这两种放法时使用了计算机,在每秒运算 20 万次的计算机上花了近半个小时.

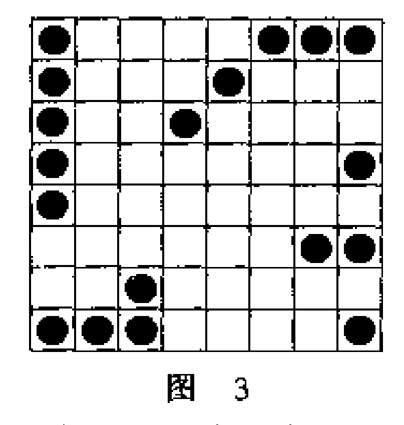


图 3

图 4

问题的研究并没有到此结束. 实际上,与 $HR(8,8)$ 的研究类似,对 $HG(k)(k=1,2,3,4)$,我们可以研究棋盘上皇后的不同放置方案,计算共有多少种放法. 由 $k=0$ 的情形可知,找到皇后的所有不同的放法不是轻而易举的. 比如,我们要找到 8×8 棋盘上 $HG(4)$ 只皇后的不同于上图的另一种放置方案就比较困难,找到所有不同的放法就更难了,有兴趣的读者不妨试试.

2.3 限制性布局

在棋盘中放置若干只棋，使棋盘中某种范围内的棋子数合乎一定的限制，这样的一种布局称为限制性布局.

问题1 在 $2m\times 2n$ 棋盘上放有 r 只棋(每个格最多放一只棋)，若 r 具有如下的性质：不论 r 只棋如何分布，总可以从中选取 m 行 n 列，使它们包含所有的 r 只棋，求 r 的最大值.

此问题还没有最后结果，不过我们解决了 $m=n$ 的情形，即有下面命题：

命题1 在 $2n\times 2n$ 棋盘上任意放 r 只棋子(每个格最多一只棋)，都能从棋盘中选取 n 行 n 列，使它们包含所有的 r 只棋，则 r 的最大值为 $3n$.

证：假定 $2n\times 2n$ 棋盘上放有 $3n$ 只棋，我们证明：可从棋盘中适当地选取 n 行 n 列，使它们包含所有的 $3n$ 只棋.

先取出 n 行，使之尽可能多地取出棋子，这就应取那些棋子最多的行，不妨设第 i 行的棋子的个数为 a_i，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n}$. 我们取出第 $n+1, n+2, \cdots, 2n$ 行，令 $x=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$. 有一种情形是不证自明的，大家是否已经发现？

若 $x\geqslant 2n$，则取出前述的 n 行后最多剩下 n 只棋子，它们最多分布在 n 列，再取出这些棋所在的列即可.

若 $x<2n$，则 $a_{n+1}\leqslant 1$，所以，$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$，$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n$，故 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})<n+2n=3n$. 矛盾.

下面证明：可以在 $2n\times 2n$ 棋盘上适当放 $3n+1$ 只棋，每个格最多一只棋，使不论从中选取哪 n 行和哪 n 列，它们都

不包含所有的 $3n+1$ 只棋，实际上，放棋的方法如图 1 所示：

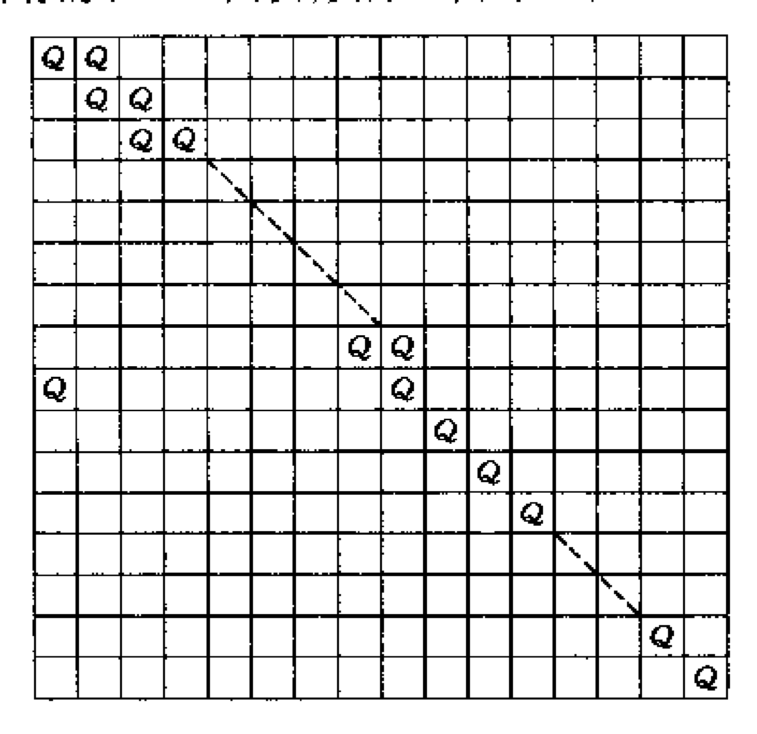


图 1

问题 2 在 $n\times n$ 棋盘上放有 r 只棋，每个格最多一只棋，若 r 只棋具有如下的性质 p：每行每列至少有一只棋，但去掉其中任何一只棋，则它们便不再具有上述的性质 p，求 r 的最大值 $r(n)$.

先考虑简单情形，为了叙述问题的方便，对于具有性质 p 的棋盘，如果去掉其中一只棋以后，棋盘仍然具有性质 p，则称那只棋为可去棋.

当 $n=2$ 时，$r(2)<3$. 否则，棋盘上放 3 只棋，必有一个角上的棋为可去棋，矛盾.

当 $n=3$ 时，$r(3)<5$. 否则，棋盘上放 5 只棋，必有一行有两只棋. 不妨设第一行的前两格 a_{11}，a_{12}各有一只棋，此时，第一、第二列不能再有棋. 比如第一列还有一只棋 A，则格 a_{11}中

的棋可去;第二列有一只棋 B,则格 a_{12}中的棋可去.这样剩下的 3 只都在第三列,此时,格 a_{13}中的棋是可去棋.

一般地,对自然数 n,我们猜想有 $r(n)<2n-1$.

实际上,由上面的证明过程可知,若某个行有两只棋 a,b,则棋 a,b 所在的列无其他的棋.比如,若 a 所在的列还有一只棋,则 a 是可去棋.由此去掉一行一列可将 n 的问题化归为 $n-1$ 的问题.

我们用反证法证明 $r(n)<2n-1$,即证明如下的结论:

如果棋盘中至少放有 $2n-1$ 只棋,则棋盘上必有可去棋.(*)

对 n 用数学归纳法.

设结论(*)对小于 n 的自然数成立.考察 $n\times n$ 棋盘,为了利用归纳假设,应去掉一行和一列,且使剩下的棋盘中至少 $2n-3$ 只棋,这就要求去掉的行和列中一共只包含有 2 只棋.因此,我们要找到恰有一只棋的行和列.但棋盘中的棋子数不少于 $2n-1$,并不意味着棋盘中的棋子数为 $2n-1$.因此,不能由抽屉原理找到恰有一只棋的行和列.注意到前面所证的结论:若某个行有两只棋.则这两只棋所在的列只能有一只棋,由此便可找到合乎要求的列(读者在未看下文之前,可自己先思考具体解法).

由于棋盘中至少有 $2n-1$ 只棋,由抽屉原理,至少有一行有两只棋.不妨设第一行的前两格各有一只棋 a,b(图 2),此时,第一,第二列不能再有棋(第一列还有一只棋,则棋 a 可去;第二列有一只棋,则棋 b 可去).这样,剩下的 $2n-3$ 只棋都在后 $n-2$ 列.由抽屉原理,必有某个列有两只棋.不妨设第 3 列的第 i 格和第 j 格分别有一只棋 c,d.同样 c,d 所在的行不能再有棋(若 c 所在的行还有一只棋,则棋 c 可去;若

d 所在的行有一只棋，则 d 可去）. 这样，a 所在的列只有一只棋，c 所在的行只有一只棋. 去掉这行和这列，对剩下的棋盘使用归纳假设，命题（ * ）获证.

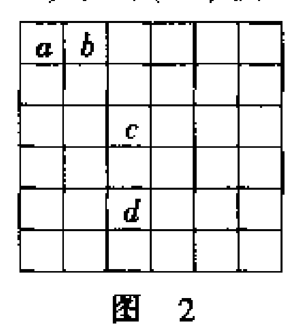


图 2

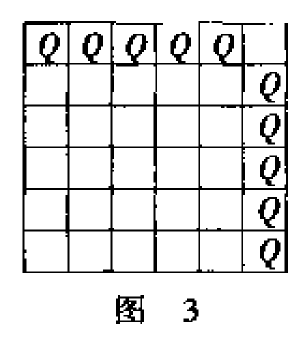


图 3

最后，由图 3 可知，$r=2n-2$ 是可能的，故

$$r(n)=2n-2.$$

将上述问题推广，便得到如下的命题：

命题 2 在 $m\times n$ 棋盘上放有 r 只棋（每个格最多一只棋），使 r 只棋具有性质 p：每行每列至少有一只棋. 但去掉其中任何一只棋，则它们便不再具有上述的性质 p，则 r 的最大值 $r(m,n)=m+n-2$.

证：一方面，由图 3 可知，$r=m+n-2$ 是可能的.

下面证明 $r<m+n-1$. 即证明棋盘上放有至少 $m+n-1$ 只棋时，棋盘中有可去棋.（ * ）

对 $m+n$ 归纳. 当 $m+n=3$ 时，不妨设 $m=1$，$n=2$，棋盘上放有至少两只棋，显然有可去棋.

设结论（ * ）对 $m+n<k$ 的自然数 (m,n) 成立. 考察 $m+n=k$ 的情形，此时，棋盘中至少放有 $k-1$ 只棋.

若 $n=1$，则结论显然成立.

若 $n>1$，则由于棋盘上至少放有 $m+n-1>m$ 只棋，必有一行至少含有两只棋. 不妨设第一行的棋最多，共有 t 只棋，设为 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1t}(t>1)$. 则这些棋所在的列中不能再

有其他的棋. 比如,若 a_{11}所在的列中还有一只棋,则 a_{11}可去. 于是,去掉第一行和前 t 列,剩下$(m-1)\times(n-t)$棋盘,此棋盘中至少有 $m+n-1-t=(m-1)+(n-t)$只棋. 注意到$(m-1)+(n-t)=k-t-1<k$,对$(m-1)\times(n-t)$棋盘利用归纳假设,知$(m-1)\times(n-t)$棋盘中存在可去棋,结论(*)获证.

问题 3 在 $m\times n$ 棋盘中最多可以放多少只棋,使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋?

对此问题,我们只解决了 m,n 为奇数的情形,即有下面的命题:

命题 3 在$(2m-1)\times(2n-1)(m\leqslant n)$棋盘中放 r 只棋,使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋,则 r 的最大值为 $r(m)=m(2n-1)$.

证:对 m 用数学归纳法.

(1)当 $m=1$ 时,每个格都可以放棋,所以 $r(1)=2n-1$.

(2)当 $m=2$ 时,由图 4,$3\times(2n-1)(2\leqslant n)$棋盘中可以放 $2(2n-1)$只棋,使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋.

下面证明:$3\times(2n-1)(2\leqslant n)$棋盘中最多可以放 $2(2n-1)$只棋,使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋. 由于 $3\times(2n-1)$棋盘要去掉两行才能化为 $1\times(2n-1)$棋盘,那么去掉的两行中至多有多少只棋呢? 为此,我们要研究一下 $2\times(2n-1)$棋盘,而这是我们已经跳过了的情形. 这种情形对于我们研究 $m=2$,即 $3\times(2n-1)$棋盘也许有帮助. 因此,我们回头看看 $2\times(2n-1)$棋盘. 由图 5 中的布局,我们猜想:在 $2\times(2n-1)$棋盘中,有 $r\leqslant 2n$,且等号只能以图 5 的方式唯一实现.

实际上,第一列至多有两只棋,而后 $2n-2$ 列可以划分为 $n-1$ 个 2×2 棋盘,每个 2×2 棋盘至多可以放 2 只棋. 所

以，$r \leqslant 2+2(n-1)=2n$. 若 $r=2n$，则第一列必有两只棋，且每个 2×2 棋盘中都恰有 2 只棋. 于是，第一列有两只棋，则第二列中无棋，于是第三列中有两只棋，……如此下去，所有奇数列中都有两只棋，而所有偶数列中都没有棋. 即等号以唯一的方式实现.

现在考虑 $3 \times (2n-1)$ 棋盘，我们要证明 $r \leqslant 2(2n-1)$. 很自然地，应将 $3 \times (2n-1)$ 棋盘化为一个 $2 \times (2n-1)$ 棋盘（简称为 A 盘）和一个 $1 \times (2n-1)$ 棋盘（简称为 B 盘）处理. 由前面的讨论可知，$r_A \leqslant 2n$，$r_B \leqslant 2n-1$. 所以，

$$r = r_A + r_B \leqslant 4n-1. \quad ①$$

若①成立等号，则 $r_A=2n$，$r_B=2n-1$. 此时，棋盘中棋的放置如图 6 所示. 但其中有一些 2×2 正方形中放了 3 只棋，矛盾. 所以 $r \leqslant 4n-2$.

Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q
Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

图 4

Q		Q		Q		Q
Q		Q		Q		Q

图 5

Q		Q		Q		Q
Q		Q		Q		Q
Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

图 6

一般地，对 $(2m-1) \times (2n-1)$ 棋盘，若 $m \leqslant n$，我们证明：$r \leqslant m(2n-1)$. 对 m 用数学归纳法：

当 $m=1$ 时，结论显然成立. 设结论对于小于 m 的自然数成立. 考察 $(2m-1) \times (2n-1)$ 棋盘，我们将之划分为一个 A 盘：$2 \times (2n-1)$ 棋盘和一个 B 盘：$(2m-3) \times (2n-1)$ 棋盘. 由前面的讨论和归纳假设可知，$r_A \leqslant 2n$，$r_B \leqslant (m-1)(2n-1)$. 所以，

$$r = r_A + r_B \leqslant 2n + (m-1)(2n-1) = m(2n-1)+1. \quad ②$$

若②成立等号，则 $r_A = 2n$，$r_B = (m-1)(2n-1)$. 由 $r_A = 2n$ 知，$(2m-1) \times (2n-1)$ 棋盘的第一行中恰有 n 只棋，于

是，将后 $2m-2$ 行划分为 $m-1$ 个 $2\times(2n-1)$ 棋盘，每个 $2\times(2n-1)$ 棋盘中不多于 $2n$ 只棋．于是，棋盘中的棋子的个数 $r\leqslant n+2n(m-1)=2mn-n\leqslant 2mn-m=m(2n-1)$．与 $r=m(2n-1)+1$ 矛盾．所以，②不成立等号，即 $r\leqslant m(2n-1)$．命题获证．

最后，将棋盘的奇数行的每个格都放一只棋，有 $r=m(2n-1)$．所以，$r(m)=m(2n-1)$．

问题 4 对于 $m\times n$ 棋盘，若任何 $2t\times 2t$ 棋盘中不多于 t 只棋，问最多可以放多少只棋？

问题 5 对于 $m\times n$ 棋盘，若任何 2×2 棋盘中不少于 2 只棋，问最少可以放多少只棋？

以上两个问题留给读者讨论．

问题 6 在 $n\times n$ 棋盘上放 r 只棋，使每一行，每一列，每条 45°，135°对角线上都至少有一只棋(其中认为 45°，135°的对角线各有 $2n-1$ 条)，求 r 的最小值 r_n．

此问题已被彻底解决，我们有

命题 4 在 $n\times n$ 棋盘上放 r 只棋，使每一行，每一列，每条 45°，135°对角线上都至少有一只棋，则 r 的最小值为

$$r_n=\begin{cases}2n,(n\text{ 为偶数})\\2n+1.(n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

证：我们先证明 $r\geqslant r_n$，而且不等式中的等号可以成立．为此，希望找到一些位置，使之非放棋不可，由此得到不等式估计．一个显然的事实是：若某两条线相交，则只须在其交点处放一只棋；若两条线不相交，则这两条线上要分别放一只棋．于是，我们立足于找到若干条两两不相交的线，而且这样的线越多越好(最大坏子集)．我们先看看特殊情况：

当 $n=2$ 时，显然可以找到 4 条两两不相交的对角线．于

是至少要放 4 只棋. 所以, $r \geqslant 4$. 另外, $r=4$ 是可能的, 即每个格中放一只棋, 故 $r_2=4$.

当 $n=3$ 时, 同样可以找到 4 条两两互不相交的对角线. 将它们看作一个子集 P, 则 P 中至少要放 4 只棋. 另外, A, B, C, D 四格可以连成 6 条线(图 7), 这 6 条线看作另一个子集 M. M 中的 6 条线的任何一条上都要有一只棋, 注意到这些线有公共点, 从而不必放 6 只棋. 显然, 不论棋子放在这 6 条线所通过的哪一个格上, 每只棋最多同时在 M 中的 3 条线上, 从而至少要在 M 中放 2 只棋. 但 M 中放两只棋是不够的. 若 M 中只放 2 只棋, 则每只棋都分别同时在 M 中的 3 条线上, 而且这两只棋不能有公共占住的线(即两只棋不在同一条线上), 这是不可能的. 因为 M 中的线通过的格中, 任何两个格都至少位于其中的同一条线上, 矛盾. 所以, M 中至少要放 3 只棋. 于是, $r \geqslant 4+3=7$. 另外, $r=7$ 是可能的(图 8), 故 $r_3=7$.

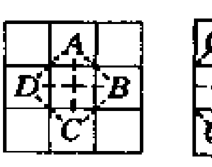


图 7

图 8

进一步, 我们有 $r_4=8$(8 条互不相交的对角线); $r_5=11$(8 条互不相交的对角线, 另外, A, B, C, D 四个格所连成的 6 条线段中至少放 3 只棋), 由此推广到一般情况, 便得到

$$r_n=\begin{cases}2n, (n \text{ 为偶数}) \\ 2n+1. (n \text{ 为奇数})\end{cases}$$

实际上, 当 n 为偶数时, 可以作出 $2n$ 条互不相交的对角线, 所以 $r \geqslant 2n$; 当 n 为奇数时, 可以作出 $2(n-1)$ 条互不相交的对角线. 另外, A, B, C, D 四个格所连成的 6 条线段中至少放 3 只棋, 所以, $r \geqslant 2(n-1)+3=2n+1$. 最后, 如图 9 和图 10, $r=2n$(n 为偶数)和 $r=2n+1$(n 为奇数)都是可能的.

与问题 6 类似的一个问题是如下的问题:

问题 7 对哪些自然数 n，能在 $n\times n$ 棋盘上放 n 只棋，使每行每列每条 45°及 135°对角线上都至多有一只棋？

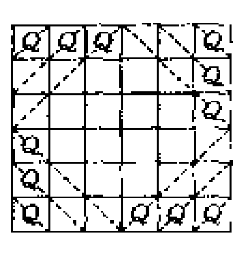


图 9

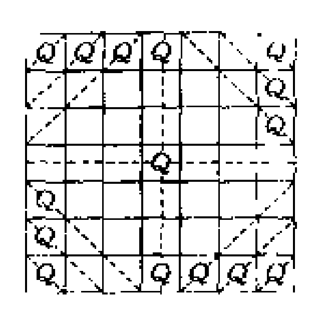


图 10

(1)如果认为棋盘只有 n 条 45°(135°)对角线，即第 $n+i$ 条对角线与第 i 条对角线看作是同一条对角线；

(2)如果认为棋盘上有 $2n-1$ 条 45°(135°)对角线.

此问题已彻底解决.讨论如下：

(1)设第 i 行放的棋在 $f(i)$ 列，并将此棋记为 $(i,f(i))$（注意我们没有把棋所在的格记为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$），那么，每一列有一只棋等价于 $f(1),f(2),\cdots,f(n)$ 构成模 n 的完系；每条 45°对角线上有一只棋等价于 $f(1)+1,f(2)+2,\cdots,f(n)+n$ 构成模 n 的完系（是因棋 (x,y) 所在的 45°对角线的编号为 $x+y-1$)；每条 135°对角线上有一只棋等价于 $f(1)-1,f(2)-2,\cdots,f(n)-n$ 构成模 n 的完系（是因棋 (x,y) 所在的 135°对角线的编号为 $x-y+n$). 于是，

$$\sum_{i=1}^{n}(f(i)-i)\equiv\sum_{i=1}^{n}i\equiv\frac{n(n+1)}{2}(\bmod n).$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i)-i)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)-\sum\limits_{i=1}^{n}i\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}i-\sum\limits_{i=1}^{n}i\equiv0(\bmod n)$，

所以，$\frac{n(n+1)}{2}\equiv0(\bmod n)$，$\frac{n+1}{2}\in Z$，$n$ 为奇数；

此外，$\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i)-i)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i)+i)^2\equiv$

$$\sum_{i=1}^{n}(f(i))^2+\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}(f(i))^2+\sum_{i=1}^{n}i^2\equiv4\sum_{i=1}^{n}i^2(\bmod n),$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i)-i)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(f(i)+i)^2\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=2\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$，

所以，$4\sum_{i=1}^{n}i^2\equiv2\sum_{i=1}^{n}i^2$，$2\sum_{i=1}^{n}i^2\equiv0(\mathrm{mod}\,n)$.

注意到$(2,n)=1$，有$\sum_{i=1}^{n}i^2\equiv0$，即 $n\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\equiv0$，所以，$\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\in N$，所以，$\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}\in N$.

若 $n=3k$，$(k\in N)$，则

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{(3k+1)(6k+1)}{3}=6k^2+3k+\frac{1}{3},$$

非整数，矛盾；所以，$3\nmid n$，即$(3,n)=1$.又$(2,n)=1$，所以，$(6,n)=1$.

反之，若$(6,n)=1$，令 $f(k)=2k(\mathrm{mod}\,n)$，则$\{f(k)\}$，$\{f(k)-k\}$，$\{f(k)+k\}$变为$\{2k\}$，$\{k\}$，$\{3k\}$.由于$\{k\}$构成模 n 的完系，$(2,n)=1$，$(3,n)=1$，所以，$\{2k\}$，$\{3k\}$亦构成模 n 的完系，从而$(k,2k)$是合乎条件的布子方法.

综上可知，所求的 n 是一切与 6 互质的自然数.

(2)当 $n=2$ 时，显然不存在合乎条件的布子方法(简称不能布子).

当 $n=3$ 时，考察第一行的布子.只有两种情况，这两种情况都不符合条件，故也不能布子.

设 $n>3$，分情况讨论：

(ⅰ)若 $n=6m+1$，或 $6m+5$，则$(n,6)=1$.由(1)可知，可以布子；

(ⅱ)若 $n=6m$ 或 $6m+4$，先构造$(n+1)\times(n+1)$的棋盘.由于$(n+1,6)=1$，则$(k,2k)(1\leqslant k\leqslant n+1)$是合乎条件的布子.其中$(k,2k)$表示格 $a_{k,2k}$中放一只棋，下标按模 $n+1$ 理解.由于$(n+1,2(n+1))$位于第 $n+1$ 行，第 $n+1$ 列，从而该行该列均只有一只棋.去掉第 $n+1$ 行，第 $n+1$ 列，剩下 n 行

n 列,没有棋同行同列同对角线,是合乎条件的布子;

(iii)若 $n=6m+2$,令

$$f(k)=2k+\frac{n-1}{2}(\bmod n),0\leqslant k\leqslant\frac{n-1}{2};$$

$$f(k)=n-1-f(n-1-k),\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n-1.$$

则$(k,f(k))$是合乎条件的布子;

(Ⅳ)若 $n=6m+3$,先按(iii)中作$(k,f(k))$的布子$(1\leqslant k\leqslant 6m+2)$.由于 $f(k)\neq k$,从而可增加第 $6m+3$ 行第 $6m+3$ 列并在$(6m+3,6m+3)$布一子,即得到 $n\times n$ 的布子.故所求的 n 的可能取值为大于 3 的一切自然数.

最后我们看一个所谓棋线对的计数问题:在 $n\times n$ 棋盘中放 n 只棋,每个方格至多放一只棋,任何两只棋不同行,不同列.自左上角至右下角沿格径画一条长为 $2n$ 的折线,使 n 只棋位于折线的下方,得到一个"棋线对".若棋所放的位置不同或所画的折线不同,则称为不同的棋线对.求所有不同的棋线对的个数.

此问题的结论是:所有不同的棋线对的个数为$\frac{(2n)!}{2^n\times n!}$.

实际上,设棋线对的数目为 $f(n,n)$,注意到 $f(n,n)$到 $f(n-1,n-1)$必须经过 $f(n-1,n)$,而 $n-1<n$,从而要将问题推广:考虑 $f(m,n)$,其中 $m\leqslant n$,在 $m\times n$ 棋盘中放 m 只棋,每个方格至多放一只棋,任何两只棋不同行,不同列.自左上角至右下角沿格径画一条长为 $m+n$ 的折线,使 m 只棋位子折线的下方,得到一个"棋线对".设棋线对的数目为 $f(m,n)$,则有如下结论:

(1)$f(0,n)=1$.实际上,此时的棋盘由 n 条单位线段组成,棋盘中不放棋,只能画一条长为 n 的线段,有唯一的画

法.

(2)$f(n,n)=f(n-1,n)$. 实际上,对 $n\times n$ 棋盘,折线必须经过点 $A(n-1,n)$(图 11). 否则,第 n 列全在折线的下方,不能放棋,棋盘中最多有 $n-1$ 只棋,矛盾. 现在去掉最后一行. 由于每行恰有一只棋,从而恰去掉一只棋. 剩下 $n-1$ 只棋放在$(n-1)\times n$ 棋盘中,有 $f(n-1,n)$种方法,所以,$f(n,n)=f(n-1,n)$.

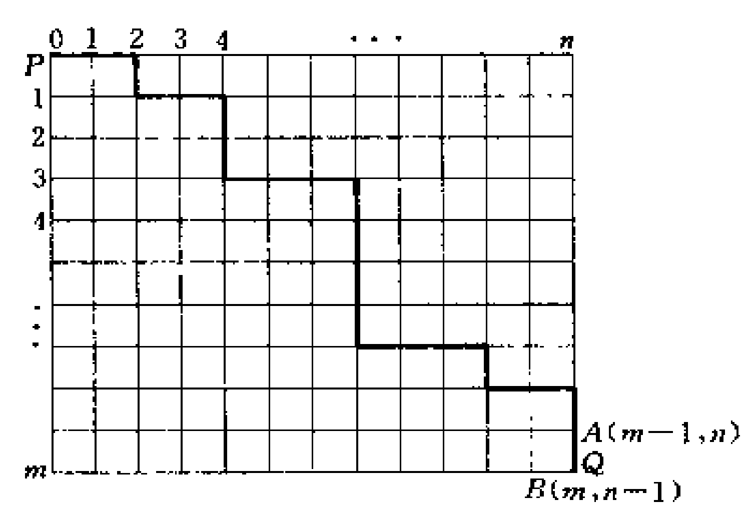


图 11

(3)$f(m,n)=f(m,n-1)+(n-m+1)f(m-1,n)$.

实际上,对 $m\times n$ 棋盘,折线可分为如下两类:

(i)过点 $A(n-1,n)$的折线. 此时,去掉最后一行,得到$(m-1)\times n$ 的棋线对. 反之,对$(m-1)\times n$ 的一个棋线对,其中只有 $m-1$ 只棋,还有 $n-(m-1)=n-m+1$ 列没有放棋. 在最下端补上一行后,此行放一只棋可放在上述 $n-m+1$ 个列中,有 $n-m+1$ 种放法,得到 $n-m+1$ 个棋线对. 于是,这种棋线对有$(n-m+1)f(m-1,n)$个.

(ii)过 $B(m,n-1)$的折线. 此时,去掉最后一列,得到一个 $m\times(n-1)$的棋线对. 反之,对 $m\times(n-1)$的一个棋线对,

其中已有 m 只棋，每行都有一只棋. 此时，只能在最右端补上一列空格，得到一个 $m\times n$ 的棋线对. 于是，这种棋线对有 $f(m,n-1)$ 个.

利用上述 3 个关系，结合数学归纳法，可以证明：$f(m,n)=\frac{(m+n)!}{2^m\times m!\ (n-m)}$.

特别地，令 $m=n$，有 $f(n,n)=\frac{(2n)!}{2^n\times n!}$.

习 题 二

1. 求 8×8 棋盘中马的控制数 $MK(8,8)$.

2. 8×8 棋盘上有 p 只马控制住了棋盘，且去掉任何一只马后不再控制住棋盘，求 p 的最大值 p_8.

3. 求 $n\times n$ 棋盘中车的控制数 $JK(n,n)$.

4. 求 $n\times n$ 棋盘中车的相容数 $JR(n,n)$.

5. 求 $n\times n$ 棋盘中象的相容数 $XR(n,n)$.

6. 求证：$(2k+1)\times(2k+1)$棋盘上的马相容数为 $2k^2+2k+1$.

7. 在 8×8 棋盘上放两只车，使它们互不相吃，有多少种放法？若是 $m\times n$ 棋盘上放 k 只车呢？(1953 年基辅数学竞赛题)

8. 有 8 只车，5 只红色，3 只蓝色，把这 8 只车放到 8×8 棋盘上，使任何两只异色的车互不相吃，有多少方法？若是 $m\times n$ 棋盘呢？

9. 在 8×8 棋盘上放置 r 只棋，使同时满足：(1)任何两只棋所在的方格没有公共点；(2)任何一个空格至少与一个放棋的格有公共点，求 r 的最小值.

10. 对 $n\times n$ 棋盘的格 2－染色，使每一列中至少有一个白格，且有一列全为白格，在棋盘中放入若干只车，使得：

(1)车都放在白格中；(2)棋盘中至少放一只车；(3)任何两只车不同行不同列；(4)对任何一个白色的空格，若它所在的行上有车，那么它所在的列上也有车.

问:对任意自然数 n,是否都存在合乎条件的布局?

11. 将 1990×1990 棋盘的每个方格都染黑白二色,使关于棋盘中心对称的任何两个方格异色;试问:能否使每一行每一列中,黑格和白格的数目都相等?

12. 4×4 棋盘上任意放 r 只棋,每个格最多一只棋.若 r 具有如下的性质:不论 r 只棋子如何分布,总可以从中选取 2 行 2 列,使它们包含所有的 r 只棋,求 r 的最大值.(第 1 届全俄数学竞赛题)

13. 能否在无限棋盘上的所有格中放数 1 和 -1,每个格放一个数,使同行,同列,同一条对角线上都不出现 3 个相邻的相同的数?

14. 在 7×12 棋盘中,将 25 个格染红色,能否使得满足:

(1)每个红格都和偶数个红格相邻?

(2)每个红格都和奇数个红格相邻?

15. 在 $m\times n$ 棋盘中放 r 只棋,求证:可以从中选出$[r/4]$只棋,使任何两只棋子所在的格没有公共点.

16. 在 $2n\times2n$ 棋盘上放有 r 只棋,每个格最多一只棋,若 r 具有如下的性质:不论 r 只棋如何分布,总可以从中选取 n 行 n 列,使它们包含所有的 r 只棋,求 r 的最大值.

17. 在 $2m\times2n$ 棋盘上放有 r 只棋,每个格最多一只棋,若 r 具有如下的性质:不论 r 只棋如何分布,总可以从中选取 m 行 n 列,使它们包含所有的 r 只棋,求 r 的最大值.

18. 在 $m\times n$ 棋盘中最多可以放多少只棋,使任何 2×2 的矩形内不多于 2 只棋?

19. 对于 $m\times n$ 棋盘,若任何 $2t\times2t$ 棋盘中不多于 t 只棋,问最多可以放多少只棋?

20. 对于 $m\times n$ 棋盘,若任何 2×2 棋盘中不少于 2 只棋,问最少可以放多少只棋?

21. 在一张很大的棋盘上放若干只棋,而且每一个 2×3 的矩形中恰有两只棋,问:9×11 矩形中有多少只棋?

22. 在 $2n\times2n$ 国际象棋盘中选定 n 个白格和 n 个黑格,使任何两个选定的格不同行也不同列,问有多少种不同的选法?

23. 在 $n\times n$ 棋盘中放入 n 只棋，每个方格最多放一只棋，使对棋盘中任何面积不小于 n 的矩形子棋盘内都至少有一只棋，求 n 的最大值.

24. 在 8×8 棋盘上放 n 只棋，使每行每列每条 $45°$，$135°$ 对角线上都有偶数只棋，求 n 的最大值.

25. 在一个无限棋盘上进行如下的游戏：先把 n^2 只棋子放在其中的一个 $n\times n$ 子棋盘中，每个方格放一只棋. 游戏的每一步允许把一只棋子沿水平或垂直方向跨越相邻并放有棋子的一个方格进入下一个方格（如果下一个方格是空格，否则不允许），跳后把跨越过那只棋子拿掉. 求所有这样的 n 的值，使存在一种玩法，在游戏的最终状态只剩下一只棋子.

26. 在上述游戏中，若最初的棋子共有 $mn(m,n>1)$ 只，它们放在无限棋盘中的一个 $m\times n$ 子棋盘中，每个方格放一只棋. 游戏规则同上，问在游戏的最终状态中剩下最少个数的棋子是多少？

27. 在 8×8 棋盘的右上角方格 A 中有堆成一摞的 n 只棋，允许依次从摞中取出棋子使之向下分或左分逐格移动，但在到达左下角方格 B 之前，任何棋子都不能摞在其他棋子之上，求 n 的最大值，可以由 A 中原来的棋子叠摞方式出发，在格 B 中得到这 n 只棋子的任何一种叠摞方式（一种叠摞方式是指 n 只棋子在摞中不同的排列顺序）？

28. 给定正整数 r，在 20×12 棋盘 $ABCD$ 中，当且仅当两个方格的中心之间的距离为$\sqrt{r}$时，可以把放在一个方格中的棋移到另一个方格中. 首先在以 A 为顶点的方格中放一只棋，要找到一系列的移动，使棋移动到以 B 为顶点的方格中去.

(1)求证：当$(r,6)\neq 1$ 时，移动不能实现.

(2)求证：当 $r=37$ 时，移动可以实现.

(3)问：当 $r=97$ 时，移动能否实现？

第三章　棋盘中的构形

所谓棋盘中的构形，是指由棋盘中若干个格的中心为顶点构成的一种图形.棋盘中的构形常常依赖于在棋盘中放置若干只棋或对棋盘的格进行染色.用 r 种颜色对 $m\times n$ 棋盘的格染色，使棋盘的每个格染且只染一种颜色，称为棋盘的 r－染色，相应的棋盘称为 r－色棋盘.r－色棋盘中有关同色格组成的图形称为同色形.本章中，我们主要研究棋盘中的同色形以及棋盘中与放置的棋有关的图的性质.

3.1　同色多边形

定义　在 r－色棋盘中，若干同色格的中心间连线构成的多边形称为 r－色棋盘中的同色多边形.

本节中，我们先介绍 r－色棋盘中同色矩形的有关结果.这里，我们约定同色矩形的边是与棋盘的边是平行的.

命题 1　在任何 2－色 $m\times 7$ 棋盘中，都存在同色矩形，则 m 满足的充要条件是 $m\geqslant 3$.

证：我们先证明任何 3×7 棋盘中，都存在同色矩形.

实际上，考察有格最多的一种颜色的格.由抽屉原理，有至少 $\left[\frac{3\times 7}{2}\right]+1=26$ 个格同色，设它为红色.26 个红格分布在 7 列中，设第 j 列有 x_j 个红格，则 $\sum x_j=26$.将同一列的每两个红格用线段连接，共有 $\sum C_{x_j}^2$ 条不同的线段.将这些线段投影

到第一列上，只有 $C_3^2=3$ 种不同的可能位置．但线段的条数：

$$\sum C_{x_j}^2=\frac{\sum x_j^2-\sum x_j}{2}\geqslant\frac{\frac{(\sum x_j)^2}{7}-\sum x_j}{2}=\frac{\frac{6^2}{7}-26}{2}>3.$$

所以，必有两条线段的投影重合．故 2－色 3×7 棋盘中必有同色矩形．其次，当 $m=2$ 时，将棋盘适当 2－染色，使相邻（有公共边）的格异色，则无合乎条件的同色矩形，证毕．

命题 2　$4\times n$ 棋盘 2－染色，必有同色矩形，则 n 满足的充要条件是 $n\geqslant7$．

证：首先，当 $n=7$ 时，由命题 1 知，存在合乎条件的矩形．其次，将 4×6 棋盘按图 1 方式 2－染色：格(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,4)，(2,5)，(3,2)，(3,4)，(3,6)，(4,3)，(4,5)，(4,6)为红色，则不存在其边平行棋盘的边的同色矩形．

实际上，考察上图中第一列中同色的几个格，它们所在的行的右边每一列都至多有一个格与其同色，因而不存在那样的同色矩形，它左边的两个顶点位于第一列．再依次考察第 2,3,…,6 列，可知不存在那样的同色矩形，它左边的两个顶点位于第 $i(i=1,2,3,\cdots,6)$ 列，所以结论成立．

R	R	R			
R			R	R	
	R		R		R
		R		R	R

图　1

命题 3　$5\times n$ 棋盘 2－染色，必存在同色矩形，则 n 满足的充要条件是：$n\geqslant5$．

证：充分性．设 $n\geqslant5$，考察其中的 5×5 子棋盘的 2－染色．由抽屉原理，必有 $\left[\frac{5\times5}{2}\right]+1=13$ 个格同色．不妨设为红色．13 个红格分布在 5 列中，设第 j 列有 x_j 个红格，$\sum x_j=13$．将同一列的每两个红格用线段连接，共有 $\sum C_{x_j}^2$ 条不同的线段．将这些线段投影到第一列上，只有 $C_5^2=10$ 种不同的可能位置．但线段的条数：

$$\sum C_{x_j}^2=\frac{\sum x_j^2-\sum x_j}{2}\geqslant\frac{\frac{(\sum x_j)^2}{5}-\sum x_j}{2}=\frac{\frac{13^2}{5}-13}{2}>10.$$

所以,必有两条线段的投影重合.故 2-色 $5\times n$ 棋盘中必有同色矩形.

必要性.由命题2,4×5 棋盘可适当2-染色,使之不存在同色矩形,所以 $n>4$.

综上所述,命题3获证.

结合上述命题,我们得到如下的定理:

定理1 在任何 2-色 $m\times n$ 棋盘中都有同色矩形,则 m,n 满足的充要条件是 $mn\geqslant21,m\geqslant3,n\geqslant3$,且 $\{m,n\}\neq\{4,6\}$.

证:充分性.不妨设 $m\leqslant n$.

(1)当 $m=3$ 时,由 $mn\geqslant21$ 知,$n\geqslant7$,由命题1,结论成立.

(2)当 $m=4$ 时,由 $mn\geqslant21$ 知,$n\geqslant6$,又 $\{m,n\}\neq\{4,6\}$,所以 $n>6$,由命题2,结论成立.

(3)当 $5\leqslant m\leqslant6$ 时,由于 $n\geqslant m\geqslant5$,由命题3,结论成立.

(4)当 $m\geqslant7$ 时,由于 $n\geqslant m\geqslant7$,由命题2,结论成立.

必要性.即证明:对任何 2-色 $m\times n$ 棋盘,都存在同色矩形,则 $mn\geqslant21,m\geqslant3,n\geqslant3$,且 $\{m,n\}\neq\{4,6\}$.首先,有 $m\geqslant3,n\geqslant5$.否则,相间染色.其次,由图1知,$\{m,n\}\neq\{4,6\}$.此外,对其他情况分类讨论如下:

(1)当 $m=3$ 时,由于 4×6 棋盘可适当2-染色而不存在同色矩形,所以 $n\geqslant7$,故 $mn\geqslant21$.

(2)当 $m=4$ 时,由于 4×6 棋盘可适当2-染色而不存在同色矩形,所以 $n\geqslant7$,故 $mn\geqslant28$.

(3)当 $m=5$ 时,由于 4×5 棋盘可适当 2－染色而不存在同色矩形,所以 $n\geqslant5$,故 $mn\geqslant25$.

(4)当 $m=6$ 时,由于 4×6 棋盘可适当 2－染色而不存在同色矩形,所以 $n\geqslant5$,故 $mn\geqslant30$.

(5)当 $m\geqslant7$ 时,由于 $n\geqslant3$,所以 $mn\geqslant21$.

综上所述,定理获证.

由定理 1 知,二色 $m\times n$ 棋盘中的同色矩形问题已被彻底解决.如果将同色矩形换成同色正方形,其结果又怎样?由此便得到如下的问题:

问题 1 对哪些自然数 m,n,在 2－色 $m\times n$ 棋盘中必存在同色正方形?

此问题是上海科技出版社田廷彦和南开大学数学系郭军伟两位同志提出来的,他们在给本书编辑的一封信中谈到了这样一个结论:将平面上的格点 2－染色,必存在同色正方形.此问题与图论中的范德瓦登(B.L.van der Waerden)定理(简称范氏定理)有关.所谓范氏定理,是指对任意自然数 m,k,都存在最小的自然数 $w(m,k)$,使 k－色自然数集合$\{1,2,\cdots,w(m,k)\}$中总含有一个 m 项的同色等差数列,其中 $w(m,k)$称为范德瓦登数.利用范氏定理,我们得到了上述问题 1 中 m,n 满足的一个充分条件.我们把它改写成下面的命题:

命题 4 在二色 $w(7,2)\times w(7,2)$棋盘中,必有同色正方形.

证:由 $w(7,2)$的存在性,可在一列格点中取 7 个同色点 $A_1,A_2,\cdots,A_7$(不妨设为黑色),使相邻两个点的距离都相等,不妨设其中相邻两个点的距离为 1(否则,去掉不含这些点的行和相应的列).如图 2,考察有关的点 $A,B,C,\cdots,X$.

下用反证法，由于 A,B,J,I 中至少有一个黑点，设为 J，则 $I(I,A_2,J,A_4)$，$E(E,J,A_3,A_2)$，$N(N,J,A_3,A_4)$为白色（其中 $I(I,A_2,J,A_4)$等为白色，表示考察正方形 IA_2JA_4，有 I 为白色，下同）. 又 E,N,M,D 中有一个为黑色，由对称性，设 M 为黑色，则 $R(R,M,A_4,A_5)$，$C(C,M,J,A_1)$，$T(T,J,M,A_6)$为白色.

		A	A_1	B		
	C	D	A_2	E	F	
G	H	I	A_3	J	K	
	L	M	A_4	N	O	P
	Q	R	A_5	S	T	
	U	V	A_6	W	X	
			A_7			

图 2

(1)S 为白色，则 $O(O,N,S,T)$，$Q(Q,S,E,C)$为黑色，$L(L,A_6,O,A_2)$，$H(H,Q,A_5,A_3)$为白色，$G(G,L,I,C)$，$D(D,I,H,C)$为黑色，得到黑色正方形 GQA_4D，矛盾.

(2)S 为黑色，则 $O(O,S,A_4,J)$，$K(K,S,M,A_2)$，$W(W,S,A_5,A_6)$，$U(U,A_7,S,M)$为白色，$P(P,K,N,T)$为黑色，$F(F,P,S,A_3)$，$X(X,P,J,A_5)$为白色，得到白色正方形 $CFXU$，矛盾.

问题 1 的解决恐怕是很困难的，因为范氏数的探求仅仅只知道最初几个简单值，比如：$w(2,k)=k+1$，$w(3,2)=9$，$w(4,2)=35$，$w(5,2)=178$，$w(3,3)=27$，$w(3,4)=76$ 等等.

下面讨论 3－色 $m\times n$ 棋盘中同色矩形的存在性问题. 对此，一个简单的结果是下面的命题：

命题 5 在 3－色 8×17 棋盘中，必存在同色矩形.

证：我们考察有格最多的一种颜色的格，由抽屉原理，有至少$\left[\dfrac{8\times 17}{3}\right]+1=46$ 个格同色，设它为红色. 46 个红格分布在 17 列中，设第 j 列有 x_j 个红格，则$\sum x_j=46$. 将同一列的每两个红格用线段连接，共有$\sum C_{x_j}^2$条不同的线段. 将这些线段投影到第一列上，只有 C_8^2 种不同的可能位置，但线段的条数：

$$\sum C_{x_j}^2=\frac{\sum x_j^2-\sum x_j}{2}\geqslant\frac{\frac{(\sum x_j)^2}{17}-\sum x_j}{2}=\frac{\frac{46^2}{17}-46}{2}>28.$$

所以,必有两条线段的投影重合.故 3－色 8×17 棋盘中必有同色矩形.

注:若用下述方法则失效:每列必有两格同色,称之为同色对.同色对有三种可能的颜色,且有 $C_8^2=28$ 种位置,从而有 54 种可能的位置颜色搭配.但同色线段只有 17×3＝51 条,不能找到两条同位置、同颜色的线段.但这种思路还是可取的.实际上,对这一方法稍作改进即可奏效,读者不妨先自己思考,然后再参考如下定理 2 的证明.

定理 2 在任何 3－色 $m\times n$ 棋盘中,都存在同色矩形,则 mn 的最小值为 76.

证:首先,4×19 棋盘 3－染色,必有同色矩形,证明如下:

因为 76 个格染三色,必有 26 个格同色,设为红色,又设第 j 列上有 x_j 个红格.同一列的红点连接,得 $C_{x_j}^2$ 条线段,所有红线段的条数为:

$$\sum C_{x_j}^2=\frac{\sum x_j^2-\sum x_j}{2}\geqslant\frac{\frac{(\sum x_j)^2}{19}-\sum x_j}{2}=\frac{\frac{26^2}{19}-26}{2}=t.$$

但 $t=\dfrac{\frac{26^2}{19}-26}{2}<6=C_4^2$,不能得到同色矩形,我们采用另外的策略:

棋盘每一列有 4 个格,染 3 色,必有两个格同色.如果这两个格同为红色,则称此列是偏红色的,同样定义偏蓝的、偏黄的列.棋盘的 19 个列中至少有 7 列是偏同一色的,不妨设有 7 列是偏红色的,将这 7 列中同一列中的红色格连线段,得

到 7 条不同的线段，但只有 $C_4^2=6$ 种不同的射影，所以，必有两条线段的投影重合，故 4×19 棋盘必有同色矩形.

所以，当 $mn=76$ 时，存在合乎条件的棋盘.

其次，我们证明：$mn\geqslant76$. 实际上，若任何 3－色 $m\times n$ 棋盘都存在同色矩形，则 m,n 具有如下一些性质：

(1) $m,n\geqslant3$. 否则，每一行染同一色，相邻的行不同色，则无同色矩形.

(2) 由下述 3 个数表可知，4×18 棋盘，6×15 棋盘，9×10 棋盘都不合乎条件.

1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,
1,3,3,3,3,2,1,1,1,1,3,2,2,2,2,
3,1,3,2,2,1,2,1,3,3,2,3,2,1,1,
2,2,1,2,3,3,3,2,3,1,1,1,3,1,2,
2,3,2,1,2,3,1,3,2,3,1,2,1,3,1,
3,2,2,3,1,1,3,3,1,2,2,1,1,2,3,

6×15

1,2,3,1,1,1,2,2,3,3,
1,2,3,3,3,3,1,1,2,2,
1,2,3,2,2,2,3,3,1,1,
3,1,2,1,2,3,1,2,1,3,
3,1,2,3,1,2,3,1,3,2,
3,1,2,2,3,1,2,3,2,1,
2,3,1,1,2,3,2,1,3,1,
2,3,1,3,1,2,1,3,2,3,
2,3,1,2,3,1,3,2,1,2,

9×10

1,1,1,2,3,2,3,3,3,1,1,1,2,2,2,1,1,1,
1,2,2,1,1,3,3,1,1,3,3,2,2,1,1,2,2,3,
3,1,3,1,2,1,1,3,2,3,2,3,3,2,3,2,3,2,
2,3,1,3,1,1,2,2,3,2,3,3,1,3,2,3,2,2,

4×18

以上棋盘的验证方法与命题2相同.

(3)$m=4$ 时,因为 4×18 不合,所以 $n\geqslant 19$,所以 $mn\geqslant 4\times 19=76$.

(4)$m=5$ 时,因为 5×15 不合,所以 $n\geqslant 16$,所以 $mn\geqslant 5\times 16=80$.

(5)$m=6$ 时,因为 6×15 不合,所以 $n\geqslant 16$,所以 $mn\geqslant 6\times 16=96$.

(6)$m=7$ 时,因为 7×10 不合,所以 $n\geqslant 11$,所以 $mn\geqslant 7\times 11=77$.

(7)$m=8$ 时,因为 8×9 不合,所以 $n\geqslant 10$,所以 $mn\geqslant 8\times 10=80$.

(8)$m=9$ 时,因为 9×10 不合,所以 $n\geqslant 11$,所以 $mn\geqslant 9\times 11=99$.

(9)$m=10$ 时,因为 9×10 不合,所以 $n\geqslant 10$,所以 $mn\geqslant 10\times 10=100$.

(10)$m=11,12,\cdots,15$ 时,因为 6×15 不合,所以 $n\geqslant 7$,所以 $mn\geqslant 7\times 11=77$.

(11)$m=16,17,18$ 时,因为 4×18 不合,所以 $n\geqslant 5$,所以 $mn\geqslant 5\times 16=80$.

(12)$m\geqslant 19$ 时,因为 $n\geqslant 4$,所以 $mn\geqslant 19\times 4=76$.

综上所述,定理2获证.

定理2并没有彻底解决3－色 $m\times n$ 棋盘中的同色矩形问题,因为并没有求出所有合乎条件的自然数 m,n.于是,我们可提出如下的问题:

问题2 对哪些自然数 m,n,3－色 $m\times n$ 棋盘中必存在同色矩形?

问题2的一个特殊情形是下面的问题:

问题 3 对哪些自然数 n，3－色 $n\times n$ 棋盘中必存在同色矩形？

问题 3 已彻底解决，合乎条件的自然数是一切大于 10 的自然数．即下面的定理：

定理 3 3－色 $n\times n$ 棋盘存在同色矩形的充要条件是：$n\geqslant 11$．

证：先证明任何 3－色的 11×11 棋盘中必有同色矩形．实际上，棋盘的 121 个格 3－染色，必有 41 个格同色，设为红色．设第 j 列的红色格的个数为 x_j，则由

$$\sum C_{x_j}^2=\frac{\sum x_j^2-\sum x_j}{2}\geqslant\frac{\frac{(\sum x_j)^2}{11}-\sum x_j}{2}$$

$$=\frac{\frac{41^2}{11}-41}{2}>55=C_{11}^2$$

可知，任何 3－色的 11×11 棋盘中必有同色矩形．其次，如下图，存在 3－色的 10×10 棋盘．其中不含同色矩形：

1,2,1,3,3,3,2,1,2,3
1,2,3,2,3,1,3,2,3,1
2,3,1,2,2,3,3,3,1,1,
2,2,2,3,1,1,1,3,3,2,
1,2,3,1,2,2,1,3,1,3,
2,3,1,1,1,2,2,2,3,3,
3,1,2,1,2,1,3,2,2,3,
3,1,2,2,1,3,2,1,3,1,
3,1,1,2,3,2,1,3,2,2,
3,3,3,3,2,1,2,1,1,2,

进一步考察 k－色 $m\times n$ 棋盘．我们提出如下一个更一

般的问题：

问题 4 对给定的自然数 k，哪些自然数 m,n，能使任何 k－色 $m\times n$ 棋盘中都有同色矩形？

此问题的一个特殊情形是下面的问题：

问题 5 对给定的自然数 k，哪些自然数 n，能使任何 k－色 $n\times n$ 棋盘中都有同色矩形？

显然，如果任何 k－色 $n\times n$ 棋盘中都有同色矩形，则任何 k－色 $(n+i)\times(n+i)$ 棋盘中都有同色矩形 $(i>0)$. 于是，我们只须求出最小的自然数 $R(k)$，使任何 k－色 $R(k)\times R(k)$ 棋盘中都有同色矩形.

易知，$R(1)=2$. 由命题 5 知，$R(2)=5$，由定理 3 知，$R(3)=11$.

$R(4)$ 是多少？这还是一个悬而未决的问题. 正因为计算 $R(k)$ 之值相当困难，我们可转向 $R(k)$ 的界估计，对此，我们有下面的定理：

定理 4 $R(k)\leqslant k^2+k-1$.

证：令 $n=k^2+k-1$，我们只须证明任何 k 色 $n\times n$ 棋盘有同色矩形.

实际上，$n\times n$ 棋盘有 $n^2=[k(k+1)-1]^2=k^2(k+1)^2-2k(k+1)+1$ 个方格，k－染色，必有 $[n^2/k]+1=k(k+1)^2-2(k+1)+1=k(k+1)^2-2k-1=k(k+1)^2-(k+1)-k=(k+1)[k(k+1)-1]-k=(k+1)n-k$ 个方格同色. 令 $t=(k+1)n-k$，不妨设有 t 个红格，又设 $n\times n$ 棋盘中第 j 列有 x_j 个红格 $(j=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{j=1}^{n}x_j=t$. 将同一列的每两个红格连线段，得到 $C_{x_j}^2$ 条线段，于是，棋盘的 n 列中所有线段的条数为 $\sum C_{x_j}^2$. 但棋盘中无红色矩形，所以任何两条线段在第一

列中的投影互不重合，于是，

$$C_n^2 \geqslant \sum C_{x_j}^2 = \frac{\sum x_j^2 - \sum x_j}{2} \geqslant \frac{\frac{(\sum x_j)^2}{n} - \sum x_j}{2} = \frac{\frac{t^2}{n} - t}{2} = \frac{t^2}{2n} - \frac{t}{2}.$$

所以 $n^2(n-1) \geqslant t^2 - nt = t(t-n) = [(k+1)n-k](kn-k) = [(k+1)n-k]k(n-1)$，即 $n^2 \geqslant k(k+1)n - k^2$.

将 $n = k^2 + k - 1$ 代入上述不等式，化简得到 $k \leqslant 1$，矛盾.

我们还可从另一个角度来研究上述问题，即讨论 r－色 $m \times n$ 棋盘中不存在某种颜色的同色矩形时棋盘中某种颜色的格至多有多少个？这是一个容量很大的问题，就是它在 $m = n$ 时的特例也不易解决. 对此我们仅有一个界的估计，即下面的定理：

定理 5 将 $n \times n$ 棋盘的某 r_n 个格染红色，使棋盘中不存在红色矩形，则

$$r_n \leqslant \frac{n + n\sqrt{4n+3}}{2}.$$

证：设第 i 行有 x_i 个红格，则 $\sum x_i = r_n$. 第 i 行的 x_i 个红格共可构成 $C_{x_i}^2$ 个红格对. 由于不出现红色矩形，所以任何两个不同行中红格对所在位置不完全相同. 注意到棋盘每行有 n 个格，有 C_n^2 个不同的格对位置，所以 $C_{x_i}^2 \leqslant C_n^2$. 所以，

$$C_n^2 \geqslant \sum C_{x_i}^2 = \frac{\sum x_i(x_i-1)}{2} = \frac{\sum x_i^2 - \sum x_i}{2} = \frac{\sum x_i^2}{2} - \frac{r_n}{2}$$

$$\geqslant \frac{(\sum x_i)^2}{2n} - \frac{r_n}{2} = \frac{r_n^2}{2n} - \frac{r_n}{2}.$$

解上述不等式，得 $r_n \leqslant \dfrac{n + n\sqrt{4n+3}}{2}$.

上述不等式能否成立等号？换句话说，r_n 的最大值是多少？这个问题还没有一般的答案. 但我们知道，当 $n = 4, n = 7$

和 $n=13$ 时,上述不等式可以成立等号.也就是说,r_4,r_7,r_{13} 的最大值分别为 9,21,53.其中构造等号成立的例子在 $n=4$ 时是很容易的(图 3),而 $n=7$ 和 $n=13$ 时的构造则要用到相当巧妙的对应技巧.

当 $n=7$ 时,考察由 0,1 构成的三数组(a_1,a_2,a_3),其中 a_1,a_2,a_3 不全为零.这样的三数组共有 $2^3-1=7$ 个.将这 7 个三数组分别代表第一到第七行,不同的数组代表不同的行.此外,如果第 i 行用三数组(a_1,a_2,a_3)表示,则第 i 列也用这个三数组表示.对于某行(a_1,a_2,a_3)和某列(b_1,b_2,b_3),当且仅当 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 为偶数时,将这行和这列交叉的格染红,便得到如下构图(图 4):

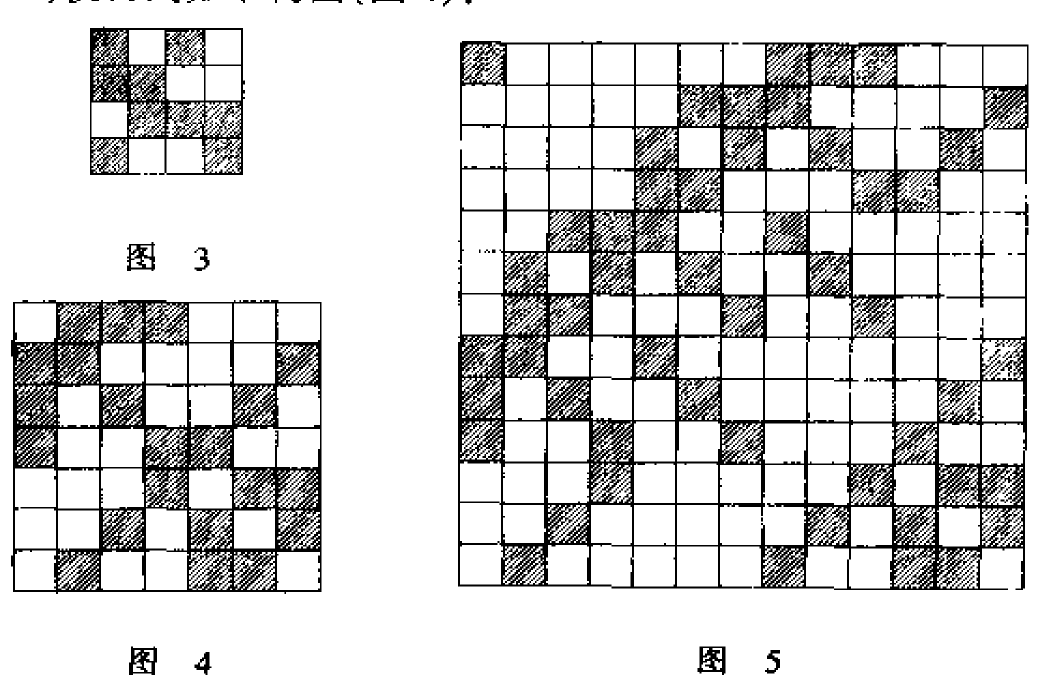


图 3

图 4

图 5

当 $n=13$ 时,考察由 0,1,-1 构成的不全为零的三数组(a_1,a_2,a_3),这样的三数组共有 $3^3-1=26$ 个.如果某一个数组可由另一个数组中的三个数同时乘以 -1 而得到,则在这两个数组中选且只选取一个数组,这样共选取了 13 个数组.

将这选取的 13 个数组分别代表第一到第十三行，不同的数组代表不同的行．此外，如果第 i 行用三数组(a_1,a_2,a_3)表示，则第 i 列也用这个三数组表示．对于某行(a_1,a_2,a_3)和某列(b_1,b_2,b_3)，当且仅当 $3\mid a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 时，将这行和这列交叉的格染红，得到如图 5 所示的构图．

如果我们不要求同色矩形的边平行于棋盘的边，则由上述一些问题可导出对应的一些难度更大的问题，这些都请读者自己研究．这方面的一个简单结果是下面的定理：

定理 6 将 $n\times n(n>1)$棋盘中任 r 个格染红色，棋盘中必有红色平行四边形，则 r 的最小值为 $r_n=2n$．

证：先证 $r\geqslant 2n$．

实际上，当 $r<2n$ 时，第一行第一列共有 $2n-1$ 个格，取其中 r 个格染红色，棋盘中不存在红色平行四边形，矛盾．

其次，当 $r=2n$ 时，我们证明：将棋盘中任何 $2n$ 个格染红色，必有红色平行四边形．

实际上，设第 i 行有 t_i 个红格，则$\sum_{i=1}^{n}t_i=2n$．考察同一行中的两个红格组成的红格对之间的距离，第 i 行的 t_i 个红格至少有 t_i-1 个不同的非零距离（比如，每个红格到最左边的红格的距离各不相同）．于是，各行中互异的非零距离共至少有$\sum_{i=1}^{n}(t_i-1)=2n-n=n$ 个．但同一行中只有 n 个格，所以只有 $n-1$ 个不同的距离．这样，至少有两行，这两行中分别有两个红格的距离相等，此四个红格便构成红色平行四边形．证毕．

棋盘染色问题与二部分完全图中的 Ramsey 数有密切联系．

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$是两个点集，

将 A 中的每一个点与 B 中的每一个点相连，而 A 中的点互不相连，B 中的点也互不相连，得到的图称为二部分完全图，记作 $K_{m,n}$. 将 $K_{m,n}$中的边 k - 染色，即每条边恰染给定的 k 种颜色中的一种颜色，得到的图称为 k - 色二部分完全图. 由二部分图 $K_{m,n}$中若干个点和边构成的一个二部分图叫做二部分图 $K_{m,n}$的一个二部分完全子图. 如果 k - 色二部分图 $K_{m,n}$的一个二部分完全子图的边是同色的，则称此二部分完全子图为同色二部分完全子图.

在 k - 色二部分完全图中常研究如下的问题：

给定正整数 k,s,t，哪些数 m,n 使得任何 k - 色二部分完全图 $K_{m,n}$中必有一个同色的二部分完全子图 $K_{s,t}$.

特别地，若 $m=n$，对给定正整数 k,s,t，要求出所有的正整数 n，使得任何 k - 色二部分完全图 $K_{n,n}$中必有一个同色的二部分完全子图 $K_{s,t}$，只须求出最小的一个自然数 n 即可. 这样便得到如下的问题：

给定正整数 k,s,t，求最小的自然数 $n=R_k(K_{s,t})$，使得任何 k - 色二部分完全图 $K_{n,n}$中必有一个同色的二部分完全子图 $K_{s,t}$.

上述的最小自然数 $n=R_k(K_{s,t})$称为二部分完全图中的 Ramsey 数，简称为二部分 Ramsey 数.

考察一个 $m\times n$ 棋盘，将它的各行用 m 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 表示，将它的各列用 n 个点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 表示. 如果一个行与一个列有一个公共格，则将此行与此列对应的点用一条边连接. 注意到任一行和任一列都有一个交叉位置的公共格，所以 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 中任何一个点与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 中任何一个点都有边相连. 又任何两行都没有公共的格，所以，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中任何两个点都不相连，同样 $B=$

$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$中的任何两个点都不相连,从而得到一个二部分图. 显然,棋盘格的 k - 染色对应于二部分图中的边染色. 对k - 色棋盘中任何一个同色矩形,它的两个顶点对应的格在同一行,对应于二部分图中两条边共顶点. 于是,棋盘中的一个同色矩形等价于二部分图中的一个同色二部分子图 $K_{2,2}$. 于是,由前面的讨论可知, $R_2(K_{2,2})=5$, $R_3(K_{2,2})=11$, $R_k(K_{2,2})\leqslant k^2+k-1$.

确定二部 Ramsey 数 $R_k(K_{s,t})$之值是相当困难的,至今仅知道极少的几个二部 Ramsey 数,比如 $R_2(K_{3,3})=17$. $R_2(K_{3,4})=25$等,有兴趣的读者不妨作些深入的研究.

3.2 棋盘的 Q 图

对 $m\times n$ 棋盘,将它的每一个格都分别用一个点(相应格的中心)代替. 对其中的任何两个格,若某种棋 Q 按其行走规则从其中一个格走一步可以到达另一个格,则将这两个格对应的点用边连接,这样得到的一个简单图称为棋盘关于棋 Q 的图,简称棋盘的 Q 图. 对给定的棋盘,不同的棋 Q 可得到不同的图. 如棋盘的马图,车图等等. 图 1 便是一个 3×4 棋盘的马图(省略了棋盘的方格).

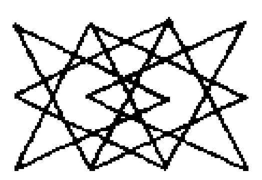


图 1

我们先讨论棋盘 Q 图的连通性. 对此,我们有如下的定理:

定理 1 $m\times n(m\leqslant n)$棋盘的马图是连通的充要条件是 $m\geqslant3,n\geqslant4$.

证:必要性,当 $m=1$ 时,$1\times n$ 棋盘的马图显然不连通

(每个点都是孤立点). 当 $m=2$ 时,奇数列格中的马只能跳到奇数列的格中,从而不连通. 此外,当 $m=n=3$ 时,中心格的马不能跳到任何一个其他的格中去,从而不连通.

充分性,当 $m=3,n=4$ 时,由图 1 可知,3×4 棋盘的马图是连通的. 当 $m\geqslant3,n\geqslant4$ 时,对棋盘中的任何两个格 P,Q,可用一连串的 3×4 棋盘将 P,Q 覆盖,且这一连串的 3×4 棋盘中任何两个相邻的 3×4 棋盘都至少有一个公共的格. 于是 $m\times n(m\leqslant n)$ 棋盘的马图是连通的.

注意到普通马的行走规则是从 2×3 矩形的一个角上方格按对角线走到另一个角上方格. 如果想象马的步子迈大些,便得到所谓的 $p\times q$ 超级马,其行走规则是从 $p\times q$ 矩形的一个角上方格按对角线走到另一个角上方格. 对 $p\times q$ 超级马,可讨论棋盘上对应的超级马图的连通性,对此,我们有下面的

定理 2 无限棋盘的 $2\times n$ 超级马图连通的充要条件是 n 为奇数.

证:必要性,若 n 为偶数,则 $2\times n$ 超级马从奇格只能跳到奇格,于是棋盘的 $2\times n$ 超级马图不连通.

充分性. 当 n 为奇数时,由图 2 可知,$2\times n$ 超级马从任何一个格出发,可跳若干步到达它的邻格. 比如:$a_{1,1}\to a_{n,2}\to a_{n-1,n+1}\to a_{n-2,2}\to a_{n-3,n+1}\to\cdots\to a_{2,n+1}\to a_{1,2}$,定理获证.

定理 3 无限棋盘的 $p\times q$ 超级马图连通的充要条件是 $(p-1,q-1)=1$,且 p,q 一奇一偶.

证:必要性. $p\times q$ 超级马的行走规则可以看作是马向某个方向(横向或纵向)移动 $p-1$ 格然后向与此运动方向垂直的方向运动 $q-1$ 格. 若 $(p-1,q-1)=d>1$,则 $p\times q$ 超级马运动若干步,在横、纵两个方向移动的格的个数始终是 d 的倍数. 所以 $p\times q$ 超级马不能从一个格运动若干步后到达它

的邻格，矛盾. 所以$(p-1,q-1)=1$. 由此可知 p,q 不能都是奇数. 若 p,q 都是偶数，则 $p\times q$ 超级马每移动一步，横向、纵向移动的格的个数都是奇数，从而 $p\times q$ 超级马从奇格只能移动到奇格，棋盘的 $p\times q$ 超级马图不连通，矛盾.

充分性. 不妨设 p 为奇数，q 为偶数. 因为$(p-1,q-1)=1$，由数论中著名的裴蜀(Bezout)定理，存在正整数 a,b，使 $a(p-1)-b(q-1)=1$. 注意到 $p-1$ 为偶数，所以 b 为奇数.

不妨设 a 为正偶数(否则反复用 $a+(q-1)$，$b+(p-1)$ 代替 a,b，直至 a 为正偶数)，则 $p\times q$ 超级马从某个格 A 出发按 $q\times p$ 的方式向右上方向连续跳 a 步，再按 $p\times q$ 方式依次交替地右下，左下，右下，左下，……，右下跳 b 步(其中注意 b 为奇数)，到达格 B(图 3)，则从格 A 到达格 B 相当于一只 $r\times 2$ 超级马跳动一次，其中 $r=a(q-1)+p$. 又 r 为奇数，由定理 2，结论成立.

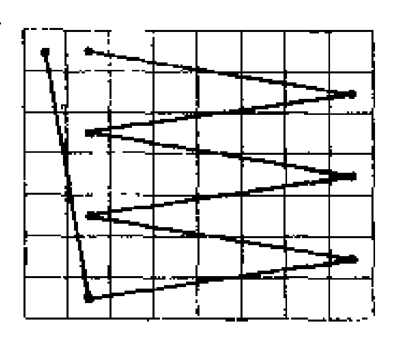


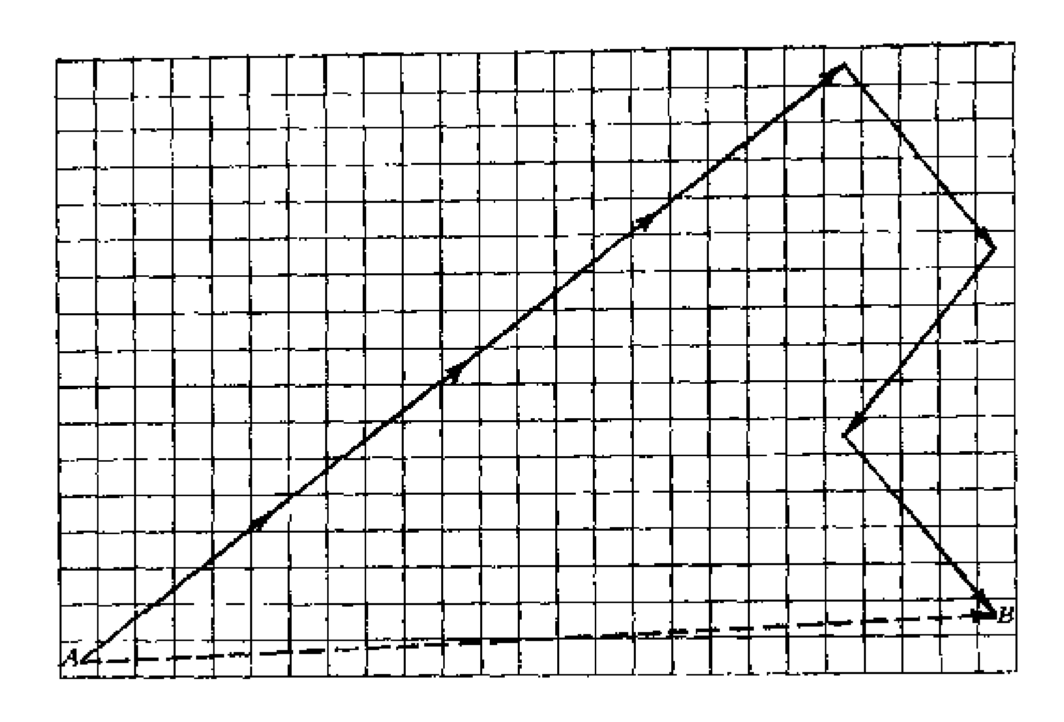
图 2

现在讨论棋盘 Q 图中的哈密尔顿(Hamilton)链或圈的存在性问题. 所谓哈密尔顿链(简称哈氏链)，是经过所有顶点恰一次的一条运动路径. 如果此路径是封闭的，则称为哈氏圈. 我们仍以马图为例进行讨论. 先看马图中的哈氏链. 一个自然的问题是：对哪些自然数 m,n，$m\times n$ 棋盘的马图存在一个哈氏链？此问题没有彻底解决. 下面介绍这方面的一些初步结果.

命题 1 5×5 棋盘的马图中存在哈氏链.

实际上，5×5 棋盘中马图的哈氏链如图 4 所示，其中每个点相应位置上的数表示马依次经过这些格的顺序.

读者自然会问：图 4 中的哈氏链是怎样找到的？一般地，



$(p=5, q=6, a=4, b=3, r=25)$

图 3

对 $m\times n$ 棋盘的马图,如何寻找哈氏链或哈氏圈?这通常有以下几种方法:

1. 优先法　即马行走时,总是将马放在度(它可以走一步到达的且未经过的点的个数)最小的点上,如图 3 中的哈氏链就是利用这一方法找到的. 首先将马放在 1 所在的点,因为它的度为 2,是度最小的点之一. 由 1 只能走到 2 和 8 所在位置,由对称性,可任取其一. 再看下一步的走法. 由 2 可走 3,21,23 这 3 个数所在的点,但其中 3 所在的点的度最小,所以走到 3 所在的点. 如此下去,便得到上述的一个哈氏链.

2. 分割法　即将棋盘划分为几个小棋盘,在每一个小棋盘中分别找哈氏链(圈),然后将各个哈氏链(圈)连起来.

利用此方法在 3×8 棋盘上找到的一个哈氏链如图 5 所示,其中左,右都是 3×4 棋盘的马图哈氏链,而连接 12,13 所在

的点,便把这两个哈氏链结合成一个 3×8 棋盘的马图哈氏链.

3	10	21	16	5
20	15	4	11	22
9	2	25	6	17
14	19	8	23	12
1	24	13	18	7

图 4

5	2	7	10	13	16	19	22
8	11	4	1	24	21	14	17
3	6	9	12	15	18	23	20

图 5

3. **串联法** 即先后在棋盘中找几个哈氏链(圈),然后将它们连起来.

利用此方法在 4×8 棋盘上找到的一个哈氏链如图 6 所示,其中 A 所在的格构成一个哈氏圈,称为 A 圈.同样有 B 圈,C 圈,D 圈,然后依次将这 4 个圈连起来便得到哈氏链.

4. **镶边法** 即先在一个较小的棋盘中找哈氏链(圈),然后在棋盘四周镶边,以产生大棋盘上的哈氏链(圈).

利用此方法在 7×7 棋盘上找到的一个哈氏链如图 7 所示,其中中心部分是 3×3 棋盘,图中有一个由字母 C 组成的圈.在这个 3×3 的棋盘四周镶上宽为 2 的边框,边框中字母 A 和字母 B 分别构成一个圈,将 A,B,C 三个圈与中心格 D 适当连接起来便得到一个哈氏链.

A	*D*	*B*	*C*	*A*	*D*	*B*	*C*
B	*C*	*A*	*D*	*B*	*C*	*A*	*D*
D	*A*	*C*	*B*	*D*	*A*	*C*	*B*
C	*B*	*D*	*A*	*C*	*B*	*D*	*A*

图 6

A	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*A*
A	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*A*
A	*A*	*C*	*C*	*C*	*A*	*A*
B	*A*	*C*	*D*	*C*	*A*	*B*
A	*A*	*C*	*C*	*C*	*A*	*A*
A	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*A*
A	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*A*

图 7

由上述方法不难得到如下的命题:

命题 2 $n\times n$ 棋盘的马图中存在哈氏链的充要条件是 $n>3$.

此结论的详细证明留给读者完成.

下面讨论棋盘的马图中哈氏圈的存在性.我们有如下一些结果.

命题3 3×4 棋盘的马图不存在哈氏圈.

证:如图8,考察 3×4 棋盘的马图中的点 A,B,C,它们分别各引出2条边.如果图中存在哈氏圈,则此哈氏圈必含有此6条边,但这6条边已构成了一个圈,而且只包含了6个点,矛盾.

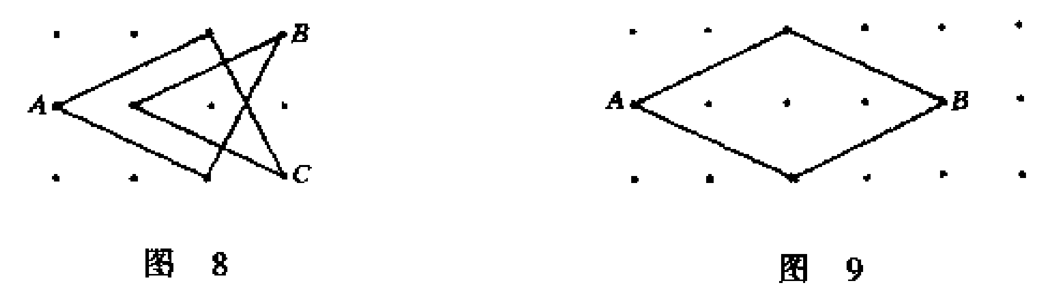


图 8　　　　图 9

命题4 3×6 棋盘的马图不存在哈氏圈.

证:如图9,考察 3×6 棋盘的马图中的点 A,B,它们分别各引出2条边.如果图中存在哈氏圈,则此哈氏圈必含有此4条边.但这4条边已构成了一个圈,而且只包含了4个点,矛盾.

命题5 3×8 棋盘的马图不存在哈氏圈.

证:如图10,考察 3×8 棋盘的马图 G 中的点 $a_{11},a_{21},a_{22},a_{31},a_{18},a_{27},a_{28},a_{38}$,它们分别各引出2条边,共有16条边.这16条边构成了6条链.如果图中存在哈氏圈,则此哈氏圈必含有此6条链.另外,此圈还要通过两个点 a_{21},a_{25}.将上述6条链用6个新点 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示,一个点代表一条链;再将 a_{24},a_{25}看作两条平凡的链,也用两个新点 A_7,A_8 表示.对于点 A_i,A_j,如果 A_i 对应的链中有一个端点与 A_j 对应的链中的一个端点在原马图中是相连的,则令 A_i 与 A_j 在新图中

相连，得到的图记为 G'（图 11）. 如果 G 中有哈氏圈，则 G' 中必有哈氏圈（当然反之不然）.

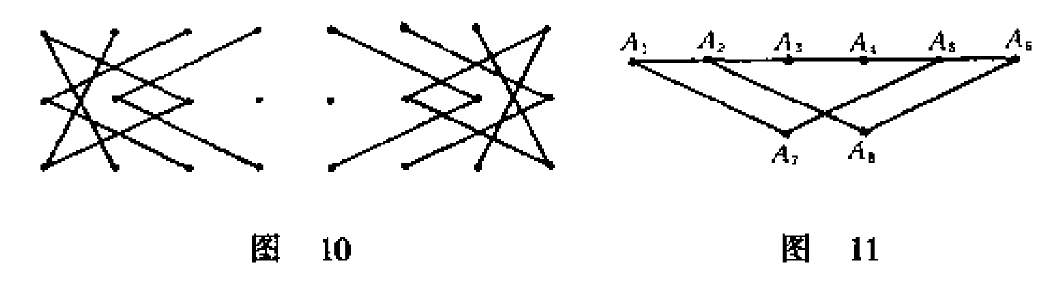


图 10　　　　图 11

考察 G' 中的点 A_1, A_6, A_7, A_8，它们都恰引出 2 条边，如果图 G' 中存在哈氏圈，则此哈氏圈必含有此 8 条边. 但这 8 条边已构成了一个圈，而且不包含点 A_3, A_4，矛盾.

命题 6　当 m, n 都是奇数时，$m \times n$ 棋盘的马图不存在哈氏圈.

证：当 m, n 都是奇数时，$m \times n$ 棋盘的奇格比偶格少一个，但其马图的哈氏圈中任何两个相邻的顶点的奇偶性不同，从而含有同样多的奇格和偶格，矛盾.

命题 7　$4 \times n$ 棋盘的马图不存在哈氏圈.

证：用反证法. 假设 $4 \times n$ 棋盘的马图存在哈氏圈 C. 想象一只马从某个点出发，绕圈 C 前进，由于相邻两个顶点的奇偶性不同，不妨设马的奇数步走到奇格，偶数步走到偶格. 现将 $4 \times n$ 棋盘的格 2－染色，使第一、第四行为蓝色，第二、第三行为红色，马从蓝格只能跳到红格上. 假设马从蓝格出发，绕 C 运动一周，依次经过的格的颜色构成一个长为 $4n$ 的二色列，此二色列中第一个位置为蓝色，第 $4n$ 个位置为红色（因为它最后要回到出发点蓝色格内）. 注意到此二色列中有 $2n$ 个位置为红色，也有 $2n$ 个位置为蓝色，于是只能是红蓝二色交替出现. 但同一种颜色格的奇偶性不全相同，矛盾.

是否所有 $m \times n$ 棋盘的马图都不存在哈氏圈？下述一些命题给出了否定的回答.

命题 8 $3\times10, 3\times12$ 棋盘的马图都存在哈氏圈.

证：$3\times10, 3\times12$ 棋盘马图中的哈氏圈如图 12，图 13 所示，其中各个顶点相应位置的数表示马依次经过这些格的顺序.

1	4	7	26	13	28	11	22	19	16
6	25	2	29	8	23	14	17	10	21
3	30	5	24	27	12	9	20	15	18

图 12

1	34	3	16	19	32	7	10	13	22	25	28
4	17	36	33	6	9	14	21	30	27	12	23
35	2	5	18	15	20	31	8	11	24	29	26

图 13

命题 9 $5\times6, 5\times8$ 棋盘的马图都存在哈氏圈.

证：$5\times6, 5\times8$ 棋盘马图中的哈氏圈如图 14，图 15 所示.

1	10	5	20	25	16
4	21	2	17	6	19
11	30	9	24	15	26
22	3	28	13	18	7
29	12	23	8	27	14

图 14

1	6	27	22	29	34	11	16
26	21	2	7	12	17	30	35
5	40	23	28	33	8	15	10
20	25	38	3	18	13	36	31
39	4	19	24	37	32	9	14

图 15

命题 10 $6\times6, 6\times7, 6\times8$ 棋盘的马图都存在哈氏圈.

证：$6\times6, 6\times7, 6\times8$ 棋盘马图中的哈氏圈如图 16，图 17，图 18 所示.

1	8	31	16	3	10
30	23	2	9	32	17
7	36	15	24	11	4
22	29	6	33	18	25
35	14	22	20	5	12
28	21	34	13	26	19

图 16

1	36	29	18	3	34	27
30	17	2	35	28	19	4
37	42	31	20	11	26	33
16	21	10	41	32	5	12
9	38	23	14	7	40	25
22	15	8	39	24	13	6

图 17

1	20	35	6	41	22	37	8
34	5	2	21	36	7	42	23
19	48	15	40	3	28	9	38
14	33	4	27	16	39	24	43
47	18	31	12	45	26	29	10
32	13	46	17	30	11	44	25

图 18

命题 11 8×8 棋盘的马图存在哈氏圈.

证：8×8 棋盘马图中的哈氏圈如图 19 所示.

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

图 19

命题 12 9×10 棋盘的马图存在哈氏圈.

证:9×10 棋盘马图中的哈氏圈如图 20 所示.

87	52	57	16	33	8	59	14	31	6
56	17	88	53	58	15	32	7	60	13
51	86	55	20	3	34	9	22	5	30
18	69	2	89	54	21	4	35	12	61
85	50	19	70	1	38	23	10	29	42
68	79	90	39	72	25	36	41	62	11
49	84	71	80	37	40	73	24	43	28
78	67	82	47	76	65	26	43	74	63
83	48	77	66	81	46	75	64	27	44

图 20

D	*C*	*A*	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*D*	*C*
A	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*	*D*	*C*	*A*	*B*
C	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*E*	*F*	*C*	*D*
B	*A*	*G*	*H*	*E*	*F*	*G*	*H*	*B*	*A*
D	*C*	*F*	*E*	*A*	*B*	*F*	*E*	*D*	*C*
A	*B*	*H*	*G*	*E*	*F*	*H*	*G*	*A*	*B*
C	*D*	*E*	*F*	*H*	*G*	*E*	*F*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*	*B*	*A*	*D*	*C*	*B*	*A*
D	*C*	*B*	*A*	*D*	*C*	*B*	*A*	*D*	*C*

图 21

图 20 中的哈氏圈是利用镶边的方法找到的,其镶边方式如图 21 所示.利用镶边的方法还不难得到如下的定理:

定理 4 $n\times n$ 棋盘的马图中存在哈氏圈的充要条件是:$n>4$,n 为偶数.

由定理 1 知,$1\times n$,$2\times n$ 棋盘的马图都不存在哈氏圈,结合上述一些结论,我们有下面的猜想:

$m\times n(m\leqslant n)$棋盘的马图不存在哈氏圈的充要条件是:m,n 满足下列条件之一:

(1)m,n 都是奇数;

(2)$m=1,2$ 或 4;

(3) $m=3$ 且 $n=4,6,8$.

上述猜想还没有得到证明,因而对一般的 m,n, $m\times n$ 棋盘的马图中存在哈氏圈的充要条件还是没有解决的问题.此外,对超级马,也可讨论对应马图中的哈氏圈.比如第 26 届 IMO 的备选题中就有这样一个问题:在 12×12 棋盘上有一只超级马,它的行走规则是从 3×4 棋盘一个角上的方格跳到对角上的一个方格.问:12×12 棋盘的马图中是否存在超级马的哈氏圈?

此题的答案是否定的.反设存在哈氏圈 C,将棋盘上的格染黑白二色,使任何相邻(有公共边)的格异色,则 C 上的黑点(黑格的中心)只能与 C 上的白点(白格的中心)相邻.设马的第一步跳到黑格,则奇数步都跳到黑格,偶数步都跳到白格.令 $A=\{$第 1,2,6,7,11,12 行中的格$\}$, $B=\{$第 3,4,5,8,9,10 行中的格$\}$.

显然,马从 A 中的格必跳到 B 中的格.但马从 B 中的格可能跳到 B 中的格.但 $|A|=|B|$,若有从 B 跳到 B 的情况,则必有从 A 跳到 A 的情况,矛盾.所以,从 B 中的格也只能跳到 A 中的格.设马的第一步跳到 A 中的格,则马的奇数步都跳到 A 中的格,从而 A 中的格都是黑格,矛盾.

对棋盘的格进行染色,可看作是对棋盘的 Q 图的点染色.于是,由 r - 色棋盘可得到 r - 色 Q 图.

在 $m\times n$ 棋盘中,若存在一个 r - 色 Q 图,使图中不存在同色链(即任何两个同色点不相邻),而任何 $(r-1)$ - 色 Q 图都存在同色链(即至少有两个同色点相邻),则称 r 是棋盘 Q 图的链色数,简称色数,记为 $QL(m,n)$.比如,棋盘马图,车图的色数可分别记为 $ML(m,n)$, $JL(m,n)$.

若存在一个 r - 色 Q 图,使图中不存在同色圈,而任何 $(r$

$-1)-$ 色 Q 图都存在同色圈,则称 r 是棋盘 Q 图的圈色数,记为 $QC(m,n)$. 比如,棋盘的马图圈色数,车图圈色数可分别记为 $MC(m,n)$, $JC(m,n)$.

在棋盘的 $r-$ 色 Q 图中,保留其中某种颜色的点,去掉其他颜色的所有点及其关联的边,得到一个同色的子图. 如果此子图中存在一个哈氏圈,则称之为棋盘的一个同色哈氏圈. 对 $m\times n$ 棋盘,若存在一个 $r-$ 色 Q 图,使图中不存在同色哈氏圈,而任何 $(r-1)-$ 色 Q 图都存在同色哈氏圈,则称 r 是棋盘 Q 图的哈氏圈色数,记为 $QH(m,n)$. 比如,棋盘马图,车图的哈氏圈色数可分别记为 $MH(m,n)$, $JH(m,n)$.

命题 13 8×8 棋盘中后图的色数 $HL(8,8)=9$.

证:如果 $HL(8,8)\leqslant 7$,则至少有一种颜色的格中有 $\left[\frac{64}{7}\right]+1=10$ 只后. 但 8×8 棋盘的后相容数 $HR(8,8)=8$,此颜色格的后中必有两只后相吃,矛盾. 如果 $HL(8,8)=8$,则至少有一种颜色的格中有 $\frac{64}{8}=8$ 只后. 由 $HR(8,8)=8$ 知,各种颜色的格中后的个数都为 8. 由 2.2 中所述,8×8 棋盘中的后相容布局只有 92 种方式,但可以验证(这里从略),其中的任何 8 种布局都不能完全覆盖 8×8 棋盘. 所以 $HL(8, 8)>8$. 最后,可将 8×8 棋盘适当染 9 色,使同色格中的后互不相吃(图

6	2	7	3	1	5	9	4
9	1	5	8	4	7	3	2
5	4	9	1	3	2	6	8
2	7	3	4	6	1	5	9
3	6	2	5	7	9	4	1
7	5	1	9	2	3	3	6
1	9	4	7	8	6	2	3
8	3	6	2	9	4	1	5

图 22

22). 命题 13 获证.

由 $HL(8,8)=9$ 的证明可以看出,对一般的 $m\times n$ 棋盘,$HL(m,n)$的探求是相当困难的. 即使是 $m=n$ 的特殊情形,我们也只知道 $HL(n,n)$的一个界的估计,这就是下面的定理:

定理 5 对 $m\times n$ 棋盘,其后图的色数 $HL(n,n)$满足:

(1)$HL(n,n)=n$ (若 n 与 6 互质);

(2)$HL(n,n)\leqslant n+1$ (若 $n+1$ 与 6 互质);

(3)$HL(n,n)\leqslant n+2$ (若 n 为奇数且被 3 整除);

(4)$HL(n,n)\leqslant n+3$ (其他情形).

证:用(i,j)表示在第 i 行第 j 列的一个格.

(1)由 2.3 中问题 7 的布局方法知,对 $k=1,2,\cdots,n$,将格$(k,2k)$染同一色(其中用(i,j)表示棋盘中第 i 行第 j 列的格,且标数模 n 理解,即大于 n 的数 x 用 $x-n$ 代替). 则任何两个同色格不在同一行,不在同一列,且不在同一条平行于对角线的斜线上. 将这 n 个同色格都向右平移一个单位,得到相应的 n 个格(格的位置也按模 n 理解). 将这 n 个格都染另一种颜色,又得到一组同色格,如此下去,最后得到 n 组同色格,此 n - 色棋盘合乎条件. 此外,棋盘里同一行的 n 个格的颜色必须互不相同,所以至少要染 n 色. 所以结论成立.

(2)因为$(n+1,6)=1$. 所以由(1),有 $HL(n,n)\leqslant HL(n+1,n+1)=n+1$.

(3)因为 n 为奇数且被 3 整除,则$(n+2,6)=1$. 所以由(1),有 $HL(n,n)\leqslant HL(n+2,n+2)=n+2$.

(4)因为 n 是偶数,所以 $n+1$ 是奇数. 又 $3\mid n+1$,由(3)便得 $HL(n,n)\leqslant HL(n+1,n+1)=(n+1)+2=n+3$.

棋盘上的 Q 图有极丰富的内容,对每一种棋 Q 都可研究相应的 Q 图的性质,希望读者能找到更多有趣的例子和结论.

习 题 三

1. $m\times n$ 棋盘 t 染色，其中有 a 个方格染了红色，第 j 列中红格的个数记为 a_j，若 $C_{a_1}^2+C_{a_2}^2+\cdots+C_{a_n}^2>C_m^2$，则棋盘中必有同色矩形.

2. 设 $m\times n$ 棋盘 t 染色，其中有 a 个方格染了红色，若 $a=pn+q$ $(q<n)$，且 $qC_{p+1}^2+(n-q)C_p^2>C_m^2$，则棋盘中必有红色矩形.

3. 在 2－色 3×7 棋盘中，必存在同色矩形，并推广此题.

4. 将 $M=\{(x,y)\mid x=0,1,\cdots,kn-1,y=0,1,\cdots,tn-1\}(k,t\geqslant2)$ 中的点 n 染色，使每色在每行中都恰出现 k 次，在每列中都恰出现 t 次，且棋盘中不含其边平行坐标轴的同色矩形. 求证：$kt\leqslant n(n+1)$.（第 26 届 IMO 备选题）

5. 若干学生参加考试，共 4 个选择题，每题有 3 个选择支. 已知：任何 3 个考生都有一个题，他们的答案各不相同，求考生人数的最大值.（第 29 届 IMO 备选题）

6. 设自然数 $n\geqslant2$，将 $(4n-3)\times(4n-3)$ 方格表每个方格都染红、蓝二色之一，证明或否定：S 中一定有 $2\times n$ 的子表，其中所有方格同色（所谓 $k\times l$ 子表是由 S 中 k 行，l 列相交得出的 kl 个方格）.

7. 可将 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 r 个格染红色，使棋盘中不存在红色的直角三角形，求 r 的最大值 $r(m,n)$.

8. 可将 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 r 个格染红色，使棋盘中不存在红色的等腰三角形，求 r 的最大值 $r(m,n)$.

9. 可将 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 r 个格染红色，使棋盘中不存在红色的等腰直角三角形，求 r 的最大值 $r(m,n)$.

10. 可将 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 r 个格染红色，使棋盘中不存在红色的直角边平行格线的等腰直角三角形，求 r 的最大值 $r(m,n)$.

11. 可将 $m\times n(m>1,n>1)$ 棋盘的 r 个格染红色，使棋盘中不存在红色的正三角形，求 r 的最大值 $r(m,n)$.

12. 可将 8×8 棋盘的格 r－染色，使棋盘中不存在同色的等腰三角形，求 r 的最大值.

13. 可将 8×8 棋盘的格 r - 染色，使棋盘中不存在同色的直角三角形，求 r 的最大值.

14. 可将 8×8 棋盘的格 r - 染色，使棋盘中不存在同色的等腰直角三角形，求 r 的最大值.

15. 可将 8×8 棋盘的格 r - 染色，使棋盘中不存在同色的其直角边平行格线的等腰直角三角形，求 r 的最大值.

16. 可将 $m\times m$ 棋盘 3 - 染色，使棋盘中不存在其边平行格线的同色矩形，求出一切可能的自然数 m,n.

17. 给定自然数 m,n，对 $m\times n$ 棋盘讨论 12—15 题.

18. 在 $n\times n$ 棋盘 $ABCD$ 中，将相对顶点 A,C 染红色，将 B,D 染蓝色，棋盘中的其他格点任意染红蓝二色之一. 求证：恰有 3 个顶点同色的方格的数目为偶数.

19. 在 7×7 棋盘中，将 19 个方格染红色，称一行或一列是偏红的，如果此行或此列中至少有 4 个红色格. 问：棋盘中至多有多少个偏红的行和列？

20. 能否对无限棋盘中的格点 4 - 染色，使每行每列都有 4 种颜色，且任何其边平行格线的正方形的 4 个顶点两两异色？

21. 在 $m\times n$ 棋盘中，从一格点出发，走遍所有的格径再回到出发点，求最短路线的长度.

22. 在 3×3 棋盘的 4 个角上各放一只马，上面一行的两只马是白色马，下面一行的两只马是黑色马. 今要将白色马走到下面一行，黑色马走到上面一行. 求证：至少要走 16 步.

23. 在 8×8 棋盘中放有若干只棋子，在每一步中，其中的某个棋子可以走到它相邻(有公共边)的空格中. 经过若干步以后，每只棋子都走过所有格一次又回到原来的位置. 求证：在棋子走动的过程中，存在一个时刻，此时的棋子都不在它原来的位置中.

24. 在 8×8 棋盘的左下角方格 A 放有一只棋子，在每一步中，棋子可以走到它相邻(有公共边)的格中，经过若干步以后，棋子都走过所有格又回到原来的位置. 问：对所有的 $i=1,2,\cdots,64$，是否都存在一个方格，使棋子恰经过该格 i 次(其中棋子在格 A 中出发和结束算经过 A 两

次)?

25. 求证:3×5 棋盘的马图中没有哈氏链;3×6 棋盘的马图中没有哈氏圈.

26. 在 4×5 棋盘的马图中找一条哈氏链.

27. 在 $m\times n$ 棋盘上有一只卒,它的行走规则是从一个格走到与此格有公共边的一个格.问:$m\times n$ 棋盘的卒图中是否存在哈氏圈?(第24届莫斯科数学竞赛题)

28. 求 $n\times n$ 棋盘中车图的色数 $JL(n,n)$.

29. 求 $n\times n$ 棋盘中马图的色数 $ML(n,n)$.

30. 求 $n\times n$ 棋盘中象图的色数 $XL(n,n)$.

第四章 棋盘填数问题

本章所说的棋盘是一种广义棋盘，即它不仅仅限于矩形棋盘，还包括圆形棋盘和多边形棋盘等。在给定棋盘的有关位置上填入若干个数，得到的一个图案称为一个*数表*。显然，数表包括矩形数表，圆形数表，多边形和区域数表等。

4.1 数表的性质

给定一个数表，证明它具有某种性质，是数表中常见的一类问题。数表的性质包括整体性质和局部性质两个方面。所谓整体性质是指整个数表所具有的性质；所谓*局部性质*，是指数表中存在一个具有某种性质的子数表。

处理数表的整体性质的常用方法有：

（1）整体估计。即从整体上计算数表中各数的和，或计算各列、各行的和。

（2）利用操作。即将一般的数表操作到特殊的数表，而操作中，保持数表的某种性质不变。由特殊数表的性质导出一般数表的性质。

我们先给出若干数表整体性质的例子。

例 1 在 $n\times n$ 棋盘（$n>3$）的每个方格都填入一个数 1 或 -1，将表中 n 个既不同行又不同列的 n 个数的积称为一个基本项。求证：所有基本项的和被 4 整除。（1989 年全国高中数学联赛试题）

证法 1:(整体估计)每一个基本项的值为 1 或 -1.记值为 1 的基本项有 P_1 个,值为 -1 的基本项有 P_{-1}个,所有基本项的和为 P,则

$$P=P_1-P_{-1}. \quad ①$$

所有基本项有 $n!$ 个,这些基本项的绝对值之和为

$$n!=P_1+P_{-1}. \quad ②$$

①+②,得 $$P=2P_1-n!. \quad ③$$

注意到 $n>3$,$4\mid n!$,所以由③知,P 为偶数.现在,问题转化为证明 $2\mid P_1$,即其值为 1 的基本项的个数为偶数.注意到所有基本项的个数 $n!$ 为偶数,从而只须证明其值为 -1 的基本项的个数为偶数,这等价于(整体估计)它们的积为正.于是,考察所有基本项之积 T.对任何一个数 a_{ij},含 a_{ij}的基本项有 $(n-1)!$ 个,于是,每个数在 T 中出现 $(n-1)!$ 次.但 $(n-1)!$ 为偶数,所以,$T>0$.这表明 -1 出现的次数为偶数,即 P_{-1}为偶数.证毕.

证法 2:(操作化归)考察一种最特殊的情形(结论显然成立的情形):所有方格中的数都为 1.此时,所有基本项之和为 $n!$.因为 $4\mid n!$,所以结论成立.此外,对任何一个数表,记所有基本项之和为 P.若表中有 -1,任取其中一个 -1,将其改变为 1,记改变后的数表的所有基本项的和为 P'.考察 P 到 P' 的改变量.因为含所改变的 -1 的基本项共有 $(n-1)!$ 个,-1 变为 1,其值增加 2,于是 P 到 P' 增加了 $2(n-1)!$.注意到 $4\mid 2(n-1)!$,所以 P,P' 模 4 同余,即上述操作使 P 模 4 不变.如此下去,直至将所有 -1 都变为 1,得到 $P^*=n!$.所以,$P\equiv P'\equiv\cdots\equiv P^*\equiv 0 \pmod 4$.

例 2 在数表 $A=(a_{ij})_{n\times n}$中,a_{ij}为非负整数.对任何 $a_{ij}=0$,都有 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n$.求证:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\geqslant\frac{n^2}{2}.$$（第 13 届 IMO 试题）

证：为了估计 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$，自然想到一行行求和．注意到共有 n 行，因而有一种特殊情形是不证自明的——各行的和都不小于 $\frac{n}{2}$，即最小的行和 $\geqslant\frac{n}{2}$．

设第 i 行的和为 A_i，不妨设 $P=A_1=\min\{A_i\}$．

(1) 若 $P\geqslant\frac{n}{2}$，则 $S\geqslant\frac{n^2}{2}$，结论成立；

(2) 若 $P<\frac{n}{2}$，为了利用条件："对任何 $a_{ij}=0$，都有 $a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n$"，应弄清第一行中有多少个零．不妨设第一行中恰有 k 个项非零，则 $k\leqslant P<\frac{n}{2}$．记这 k 个项为 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1k}$，此时，我们从列的角度估计 S．由条件，对任何 $a_{1j}=0(j=k+1,k+2,\cdots,n)$，都有 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n$，所以，$a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geqslant n-A_i$．

现在还要估计前 k 列的和，自然要思考这样的问题：每一列是否都不小于 p？什么情况下都不小于 p？

优化假设：记 $p=A_1=\min\{A_i,B_j\}(i,j=1,2,\cdots,n)$．则由 p 的最小性，有 $B_1,B_2,\cdots,B_k\geqslant p$．再由 $a_{ij}=0(j=k+1,k+2,\cdots,n)$，有 $B_{k+1},B_{k+2},\cdots,B_n\geqslant n-p$．所以，

$$S=B_1+B_2+\cdots B_n\geqslant pk+(n-p)(n-k)$$

$$=\frac{n^2}{2}+\frac{(n-2p)(n-2k)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

例 3　在 $n\times n$ 棋盘中，每个方格都填上一个绝对值不大于 1 的实数，使任何 2×2 正方形内的 4 个数之和为 0．求证：

表中所有数之和不大于 n.

证:当 n 为偶数时,$n\times n$ 数表可以分成若干个 2×2 数表,从而表中所有数的和为 0,结论成立.

当 n 为奇数时,在表中从上至下,从左到右划分出若干个 2×2 正方形,使任何两个正方形不相交,每个正方形都在 45°主对角线的上方或至多有一个格与对角线相交,且对角线上方的每一个格都恰属于一个正方形.将这些正方形的集合记为 A.A 关于 45°主对角线对称的格的集合记为 B.还有一些格(在对角线上)既不属于 A,又不属于 B,这些格的集合为 $\overline{A\cup B}$(图 1).用 $S(X)$表示集合 X 中各格填数的和.则 $S=S(A\cup B)+S(\overline{A\cup B})=S(A)+S(B)-S(A\cap B)+S(\overline{A\cup B})=S(\overline{A\cup B})-S(A\cap B)$.其中注意 $S(A)=S(B)=0$(被分为若干个 2×2 正方形).

但$(\overline{A\cup B})\cup(A\cap B)=\{$对角线上的格$\}$,所以 $S(\overline{A\cup B})+S(A\cap B)\leqslant n$,即 $S(\overline{A\cup B})\leqslant n-S(A\cap B)$.代入上式,得 $S\leqslant[n-S(A\cap B)]-S(A\cap B)=n-2S(A\cap B)\leqslant n$.命题获证.

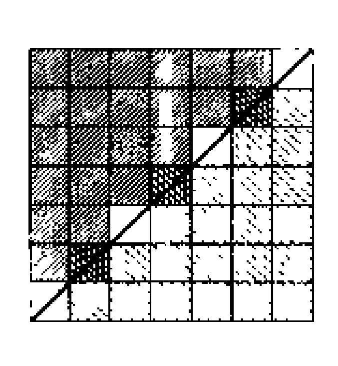


图 1

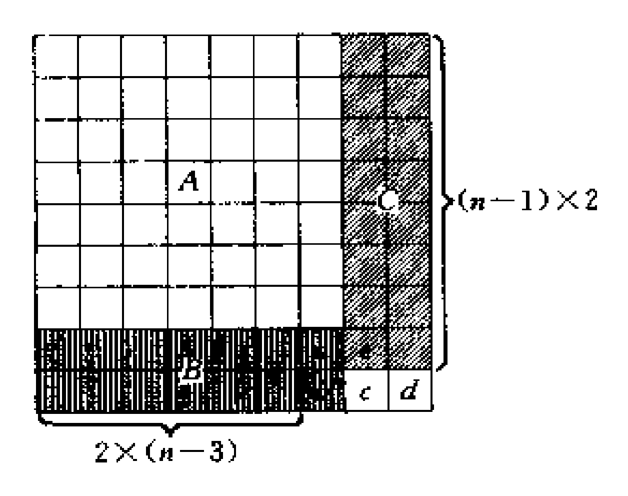


图 2

另证：对奇数 n 用数学归纳法．设结论对小于 n 的奇自然数成立．考察 $n\times n$ 棋盘．将其划分一个 $(n-2)\times(n-2)$ 棋盘 A，一个 $2\times(n-3)$ 棋盘 B 和一个 $(n-1)\times 2$ 棋盘 C（图2）．由归纳假设，$S_A\leqslant n-2$，$S_B=S_C=0$．如图 2 所示，将有关格记为 a,b,c,d,e，所填的数也用这些字母表示，那么，$a+b+c+e=0$，$a+b+c=-e$，所以，$a+b+c+d=d-e\leqslant 2$．从而 $S=S_A+S_B+S_C+a+b+c+d\leqslant(n-2)+0+0+2=n$．

例4 在一张无限大的棋盘上，每个方格都填有一个实数．给定两个平面图形，每个图形都由有限个方格组成．图形可沿格线平移整数格．已知：第一个图形 P 所在的任何位置盖住的数的和都为正．求证：对于第二个图形 Q，必存在适当的位置，使 Q 盖住的数的和也为正．

证：设图形 P 有 m 个格 $P_1,P_2,\cdots,P_m$，图形 Q 有 n 个格 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$．

平移图形 P_1，使格 P_1 与格 Q_1 重合．记这时图形 P 的格 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 盖住的 m 个格依次为 $A_{11},A_{21},\cdots,A_{m1}$．再平移图形 P，使格 P_1 与格 Q_2 重合．记这时图形 P 的格 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 盖住的 m 个格依次为 $A_{12},A_{22},\cdots,A_{m2}$，如此下去，最后使格 P_1 与格 Q_n 重合．记这时图形 P 的格 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 盖住的 m 个格依次为 $A_{1n},A_{2n},\cdots,A_{mn}$．

考察格 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$．它们都是第一个图形的格 P_1 在平移过程中盖住的格．而 P_1 依次与 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$ 重合，从而 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$构成图形 Q 的某个位置．同理，由图形平移方法知，$A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n}$；$A_{31},A_{32},\cdots,A_{3n}$；$\cdots$；$A_{m1},A_{m2},\cdots,A_{mn}$ 都分别构成图形 Q 的某个位置．于是，

$$\sum_{i=1}^{m}(A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}A_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(A_{ij}+A_{2j}+\cdots+A_{mi})>0.$$

所以,必存在一个位置,使 Q 盖住的数的和为正.

例 5 设 n 为偶数.问:在下面的数表中能否选取 n 个位置,它们互不同行,也不同列,且这 n 个位置上的数是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列?

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 2, & 3, & \cdots, & n-1, & n \\
2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & 1 \\
3, & 4, & 5, & \cdots, & 1, & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n, & 1, & 2, & \cdots, & n-2, & n-1
\end{array}$$

解:假设这样的 n 个位置存在.我们期望发现有关性质或规律,借以找到具体位置或导出矛盾——探索性问题的常用策略.

具体化:如何表示所选定的 n 个格的位置?一般是设所选出的 n 个格分别为:$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(n,j_n)$,其中$(t,j_t)$是第 t 行第j_t 列的格,而 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.这种方法,由于不知道各位置上的数是什么,因而无法发现规律.

注意到数表的特征:相同的数在同一条对角线上.若记数 t 所在的位置为(i_t,j_t),则 $i_t+j_t\equiv t+1(\bmod n)$.在这种表示下,$n$ 个数不同行不同列等价于$i_1,i_2,\cdots,i_n$,及 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.于是

$$(i_1+i_2+\cdots+i_n)+(j_1+j_2+\cdots+j_n)=n(n+1).$$

对上述等式进行模分析,有

$$0\equiv n(n+1)\equiv(i_1+j_1)+(i_2+j_2)+\cdots+(i_n+j_n)$$

$$\equiv 2+3+\cdots+(n+1)$$

$$\equiv 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\bmod n).$$

所以,$2\mid n+1$,矛盾.故合乎条件的选数方法不存在.

处理数表的局部性质的一种常用方法是利用所谓的"二色链".对序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的项 2-染色(即每个项染且只染两种颜色中的一种),若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全同色,则称之为一条二色链.

二色链具有如下的性质:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一条二色链,则必存在两个相邻的项 a_i,a_{i+1},使 a_i,a_{i+1} 异色,且 a_i 与 a_1 同色;也必存在两个相邻的项 a_j,a_{j+1},使 a_j,a_{j+1} 异色,且 a_{j+1} 与 a_n 同色.

证:因为二色链 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的项不全同色,所以至少有一个项与 a_1 异色,设它与 a_1 异色的项中下标最小的一个为 a_{i+1},则 a_i 与 a_1 同色,a_{i+1} 与 a_i 异色.同样,至少有一个项与 a_n 异色,设它与 a_n 异色的项中下标最大的一个为 a_j,则 a_{j+1} 与 a_n 同色,a_j 与 a_{j+1} 异色.证毕.

例 6 在 100×100 棋盘中,每个方格填上 0,1,-1 之一.已知表中各数之和的绝对值不大于 400.求证:存在一个 25×25 的数表,其中各数之和的绝对值不大于 25.

证:我们希望找到两个 25×25 的数表 A_1,A_2,使它们有 24 列或有 24 行公共的格(共 600 个公共格).这样,这两个数表中各数的和:$S(A_1),S(A_2)$比较接近,即有 $|S(A_1)-S(A_2)|\leqslant 50$.倘若 $S(A_1),S(A_2)$满足:$S(A_1)\geqslant 26,S(A_2)\leqslant -26$,则可导出矛盾.这就想到找一连串的 25×25 的数表:$A_1,A_2,\cdots,A_n$,然后利用二色链的性质.

将 100×100 棋盘划分为 16 个 25×25 的数表:$A_1,A_2,\cdots,$

A_{16},其中 A_i 与 $A_{i+1}(i=1,2,\cdots,15)$都有一条长为 25 的公共边(图 3).若有某个 A_i,使$|S(A_i)|\leqslant 25$,则结论成立.不妨设所有 A_i 都有$|S(A_i)|\geqslant 26$,则对每一个 i,要么 $S(A_i)\geqslant 26$,要么 $S(A_i)\leqslant -26$.注意到所有 $S(A_i)$不可能全同号,否则所有数的和的绝对值大于 400,矛盾.于是,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 按其和的符号构成一个二色链.所以必存在 i,使 $S(A_i)\geqslant 26$,$S(A_{i+1})\leqslant -26$.A_i 与 A_{i+1}拼成一个 25×50 的矩形,我们设法在此矩形中找到一个 A'_j,使 $0<S(A'_j)\leqslant 25$.实际上,将 A_i 按链的方向连续平移 25 次,每次移动一个单位,A_i 平移 t 次以后的矩形记为$A'_{t+1}(t=0,1,2,\cdots,25)$,其中 $A'_1=A_i$,$A'_{25}=A_{i+1}$.考察 $S(A'_t)$,有

A_1	A_2	A_3	A_4
A_8	A_7	A_6	A_5
A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
A_{16}	A_{15}	A_{14}	A_{13}

图 3

$$S(A'_1)=S(A_i)\geqslant 26,S(A'_{25})=S(A_{i+1})\leqslant -26,$$

由于 A'_t 与 A'_{t+1}只有一行或一列格不同,所以

$$|S(A'_t)-S(A'_{t+1})|\leqslant 50. \quad ①$$

若有某个$|S(A'_t)|\leqslant 25$,则结论成立.否则,所有$|S(A'_t)|\geqslant 26$.由于 $S(A'_1)>0$,$S(A'_{25})<0$,再由二色链的性质,必存在 i,使 $S(A'_i)\geqslant 26$,$S(A'_{i+1})\leqslant -26$.所以$|S(A'_i)-S(A_{i+1})|\geqslant 52>50$,与①式矛盾.

例 7 在 8×8 棋盘 C 中,两个具有公共顶点的格称为是相连的.将 1,2,3,…,64 分别填入各格中,每格填一个数(各格填数不同).若任何相连的两个格的数至多相差 g,则称 g 为一个 C－间隙.求出最小的 C－间隙 C_g.(1981 年第 42 届 Putanam 竞赛题)

解:我们证明一个一般结论:对 $n\times n$ 数表,有

$$C_g=n+1.$$

首先,第 i 行依次填上 $(i-1)n+1,(i-1)n+2,\cdots,(i-1)n+n$.此时,数表的 C-间隙为 $n+1$.

对任何一个 $n\times n$ 数表,设 g 是它的 C-间隙.即对任何两个相连的数 x,y,有 $|x-y|\leqslant g$.我们证明:$g\geqslant n+1$.这只须证明存在相连的两个数 a_i,a_{i+1},使

$$|a_i-a_{i+1}|\geqslant n+1. \quad ②$$

为了证明②,即找到 a_i,a_{i+1},使 $|a_i-a_{i+1}|\geqslant n+1$,想到利用二色链.即将 1 和 n 所在的格用一连串的格连接.这一连串的格称为一条链.此链(包括 1 和 n 所在的格)至多有 n 个格.不妨设共有 m 个格($m\leqslant n$).这 m 个格中的数依次为 $a_1=1,a_2,a_3,\cdots,a_m=n^2$.考察其中各相连两格填数之差,有

$$\begin{aligned}&|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|\\ \geqslant&(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_m-a_{m-1})\\ =&a_m-a_1=n^2-1.\end{aligned}$$

于是,必有一个 i,使

$$|a_i-a_{i+1}|\geqslant\frac{(n^2-1)}{m-1}\geqslant\frac{(n^2-1)}{n-1}=n+1.$$

命题获证.

例 8 在 $n\times n(n>1)$ 棋盘 C 中,两个具有公共边的格称为是相邻的.将 $1,2,3,\cdots,n^2$ 分别填入各格中,每格填一个数,各格填数不同,对任何填法,求所有相邻两格所填的数的差的绝对值最大者 r 的最小值 r_n.(1988 年第 29 届 IMO 备选题)

解:先看特殊情形.

当 $n=2$ 时,本质上只有 3 种填法(图 4):

1	2
4	3

1	2
3	4

1	3
4	2

图 4

直接观察图 4，有 $r_2=2$.

当 $n=3$ 时，由上猜想 $r_3=3$.

实际上，若 $r_3<3$，考察 1 所填的位置. 不难知道，1 只能填在角上. 否则，1 至少有 3 个邻格，必有一个邻格所填的数与 1 之差 $>2\geqslant r_2$，矛盾. 不妨设 1 填在左上角，它的邻格只能填 2 和 3. 同样知，9 只能填在角上，于是 9 只能填在右下角，而且它的邻格只能填 7 和 8. 这时，6 没有位置可填(图 5)，矛盾.

另一方面，存在一种填法，使 $r=3$(图 6). 所以，$r_3=3$.



1	2	
3		7
	8	9

图 5

1	2	3
4	5	6
7	8	9

图 6

一般地，猜想 $r_n=n$.

首先，按自然顺序填数(图 7)，得 $r=n$. 下面用反证法证明，对任何填法，必有两个邻格填数之差的绝对值不小于 n，即 $r\geqslant n$.

1	2	$\cdots$	n
$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n$
……	……	……	……
$n(n-1)+1$	$n(n-1)+2$	$\cdots$	n^2

图 7

对每一个 k(暂时固定)，令 $A_k=\{$填数$\leqslant k$ 的格$\}$，$B_k=\{$填数$\geqslant n+k$ 的格$\}$，$C_k=\{$棋盘的格$\}\setminus(A_k\cup B_k)$. 则 A_k 中的格与 B_k 中的格填数之差不小于 n. 我们设法找到 A_k 中的一个格与 B_k 中的一个格相邻，由此便有 $r\geqslant n$.

显然，$|A_k|=k$，$|B_k|=n^2-(n+k-1)=n^2-n-k+1$，

$|C_k| = n^2 - |A_k| - |B_k| = n - 1$.为了找到 A_k 中的一个格与 B_k 中的一个格相邻,应使 B_k 非空.这就要求 $n + k \leqslant n^2$,即 $k \leqslant n^2 - n$.于是,我们可令前述暂时固定的 k 只取 $1,2,\cdots,n^2 - n$ 这 $n^2 - n$ 个值.

注意到 $|C_k| = n - 1$,所以,棋盘的 n 行中必有一个行 p_k,使 p_k 不含 C_k 中的格.同样,必有一个列 q_k,使 q_k 不含 C_k 中的格.即 $p_k \cup q_k$ 包含在 $A_k \cup B_k$ 中.

若存在 k,使 $p_k \cup q_k$ 中有两个格分别属于 A_k 和 B_k,则 $p_k \cup q_k$ 中的格按属于 A_k 还是属于 B_k 构成一个二色链.由二色链的性质,必有两个相邻的格分别属于 A_k 和 B_k,结论成立.

现假定对任何一个 $k = 1,2,\cdots,n^2 - n$,都有 $p_k \cup q_k$ 包含在 A_k 中,或 $p_k \cup q_k$ 包含在 B_k 中.注意到 $|A_1| = |B_t| = 1$(其中 $t = n^2 - n$),所以 $p_1 \cup q_1$ 不包含在 A_1 中,于是 $p_1 \cup q_1$ 包含在 B_1 中.同理,$p_t \cup q_t$ 包含在 A_t 中.这样,$p_1 \cup q_1, p_2 \cup q_2, \cdots, p_t \cup q_t$ 按包含在 A_i 中还是包含在 B_j 中构成一个二色链.由二色链的性质,必存在 j,使 $p_j \cup q_j$ 包含在 B_j 中,且 $p_{j+1} \cup q_{j+1}$ 包含在 A_{j+1} 中.取 $p_j \cap q_{j+1}$ 中的一个数 x,则 x 在 $B_j \cap A_{j+1}$ 中,所以 $x \leqslant j + 1$,且 $x \geqslant n + j$,所以 $n + j \leqslant x \leqslant j + 1$,$n \leqslant 1$,矛盾.

例 9 有 h 个 8×8 棋盘,每个棋盘上的格均填上 $1,2,3,\cdots,64$ 中的一个数,使任何两个格填的数不同,并且任何两个填好了数的棋盘以任何方式重合时,相同位置上的数不同.求 h 的最大值.(第 29 届 IMO 备选题)

解:先看特殊情形.考察 2×2 棋盘,我们发现两个这样的棋盘上任何两个格都有可能重合.从而同一个棋盘上的 4 个格只能看作是一个格.所以 $h \leqslant \left[\frac{2 \times 2}{4}\right] = 1$.此时 h 的最大值为 1.

再考察 3×3 棋盘,如图 8,棋盘上的格可以分为 A,B,C 三类,同一类中的任何两个格都有可能重合.从而同一类中的格只能看作是一个格.假设有 h 个棋盘,则有 $4h$ 个 B 类格.但只有 $1,2,\cdots,9$ 这 9 个互异的数,所以 $4h\leqslant9$,故 $h\leqslant\left[\frac{9}{4}\right]=2$.而 $h=2$ 时,两个棋盘的填数如图 9 所示,所以 h 的最大值为 2.

B	C	B
C	A	C
B	C	B

图 8

2	6	3
9	1	7
5	8	4

第一个表

1	2	6
5	9	3
8	4	7

第二个表

图 9

B	C	D	B
D	A	A	C
C	A	A	D
B	D	C	B

图 10

再考察 4×4 棋盘,棋盘上的格只能分作 4 类(图 10).因为图 10 中同一类中的两个格位于两个不同的棋盘时均有可能重合,从而同一类中的格的填数不能相同.注意到有 $4h$ 个 B 类格,但棋盘中只有 16 个互异数,所以 $4h\leqslant16$,$h\leqslant4$.而 $h=4$ 时,只须 4 个棋盘的同类格中的数互不相同.先填 4 个棋盘的 16 个 A 类格.第一个棋盘的 A 类格填 1,2,3,4;第二个棋盘的 A 类格填 5,6,7,8;第三个棋盘的 A 类格填 9,10,11,12;第四个棋盘的 A 类格填 13,14,15,16.再填 4 个棋盘的 B 类格.第一个棋盘的 B 类格填 5,6,7,8;第二个棋盘的 B 类格填 9,10,11,12;第三个棋盘的 B 类格填 13,14,15,16;第四个棋盘的 B 类格填 1,2,3,4.如此轮换,得 C,D 两类格的填法.这种填法等价于将第一个棋盘的 A 类格填 1,2,3,4;B 类格填 5,6,7,8;C 类格填 9,10,11,12;D 类格填 13,14,15,16.而第二个棋盘上的填数正好是第一个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 16 者取除以 16 的余数),第三个棋盘上的填数正好是

第二个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 16 者取除以 16 的余数)等等.4 个棋盘上的填数如图 11 所示：

5	9	14	6
13	1	2	10
12	3	4	15
8	16	11	7

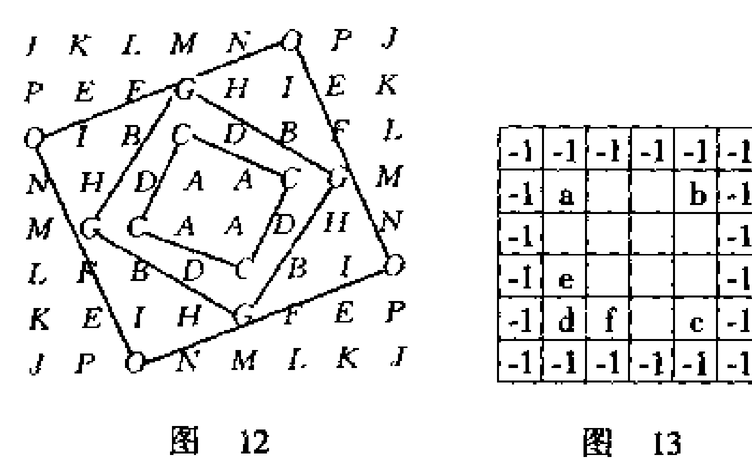
9	13	2	10
1	5	6	14
16	7	8	3
12	4	15	11

13	1	6	14
5	9	10	2
4	11	12	7
16	8	3	15

1	5	10	2
9	13	14	6
8	15	16	11
4	12	7	3

图 11

由上面的讨论,不难知道,8×8 棋盘的格分为 16 类(图 12),$h_{\max}=\left[\frac{8\times8}{4}\right]=16$.实际上,若 $h>16$,则考察其中的任意 17 个棋盘,共有 68 个 A 类格,填入 64 个数,必有两个 A 类格填数相同.而同一棋盘的填数不同,从而这两个填数相同的 A 类格分属两个不同的棋盘,它们有可能重合,矛盾.而 $h=16$ 时,只须 16 个棋盘的同类格中的数互不相同.先填第一个棋盘的 64 个格.第一个棋盘的 A 类格填 1,2,3,4;B 类格填 5,6,7,8;……;P 类格填 61,62,63,64.而第二个棋盘上的填数正好是第一个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 64 者取除以 64 的余数),第三个棋盘上的填数正好是第二个棋盘上的对应格的填数加 4(大于 64 者取除以 64 的余数)等等.



-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	a			b	-1
-1					-1
-1	e				-1
-1	d	f		c	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1

图 12　　　　图 13

一般地,我们有:$h(n)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$(证明留给读者).

例10 在 $n\times n(n>2)$ 棋盘 C 中，每格填一个数，表的边界格所填的数都为 -1. 对其他的任何空格，填上与它同行或同列中它两侧最靠近它的已填的两个数的积. 求表中所填的 1 的个数的最大值 $f(n)$ 与最小值 $g(n)$.（第 20 届前全苏竞赛题）

解：$f(n)=1(n=3$ 时$)$，$f(n)=(n-2)^2-1(n>3$ 时$)$；$g(n)=n-2$.

首先，$f(3)=g(3)=3$.

当 $n>3$ 时，我们希望表中的"1"尽可能多. 表中未填数的格能否都填 1? 通过尝试，发现至少有一个格填 -1. 实际上，考察与外围一周填"-1"的格相邻的格，其中至少有一个格填 -1. 否则，考察图 13 所示的 a,b,c,d 四格，设其中最后一个填数的格是 d. 而 a,b,c 三格都已填 1，并假定其他空格不论何时填数都填 1，则格 d 不论何时填数，都只能填 -1. 矛盾.

这样，$f(n)\leqslant(n-2)^2-1$.

其次，由行积，a 处可填 1，由列积，b 外可填 1，由行积，e,c 处可填 1，由列积，f 处可填 1，这样，d 处填 -1. 对其他各格，第二行和倒数第二行，由行积可填 1，剩下的格由列积可填 1. 此时，共有 $(n-2)^2-1$ 个 1. 所以，$f(n)=(n-2)^2-1$.

下面证明：$g(n)=n-2$. 若 $g(n)=r\leqslant n-3$，则表中个 1 至多占住 $n-3$ 行和 $n-3$ 列，于是非边界的 $n-2$ 行和 $n-2$ 列中，必有一行和一列都为 -1，但这是不可能的，因为它们的交叉处无法填入 -1，矛盾. 所以 $g(n)\geqslant n-2$.

另一方面，将 45°主对角线上非边界的 $n-2$ 个格都填 1，对其他各行的格，主对角线上方的格从左至右依次按行可填 -1，主对角线下方的格从右至左依次按行可填 -1，此时表中

共有 $n-2$ 个 1.故 $g(n)=n-2$.

例 11 在 $n\times n(n\geq 2)$数表中,每两行都不完全相同,求证:可以删去其中的一列,使剩下的数表每两行仍不完全相同.

证:我们证明如下更一般的命题:对 $m\times n(2\leq m\leq n)$数表,若每两行都不完全相同,则可适当删除 $n-m+1$ 列,使剩下的 $m\times(m-1)$数表每两行仍不相同.

对 m 用数学归纳法.为叙述问题方便,称每两行都不完全相同的数表为好数表.

当 $m=2$ 时,适当删除 $n-m+1$ 列后,只剩下 2×1 数表.因为第一行与第二行中至少有一列的元素互异,保留此列,删除其他各列即可.

设结论对 $m=k$ 时成立.当 $m=k+1$ 时,考察数表的前 k 行,其中任何两行不完全相同.由归纳假设,可以适当删除 $n-k+1$ 列,使剩下的 $k\times(k-1)$数表 A 为好的.在此基础上增加一行一列,使之变为$(k+1)\times k$ 的好数表.不妨设数表 A 位于原数表的左上角,则补上第 $k+1$ 行.若第 $k+1$ 行的前 $k-1$ 个数与 A 中各行都互异,则随意增加一列,得到$(k+1)\times k$ 的好数表.若第 $k+1$ 行的前 $k-1$ 个数与 A 中的某行完全相同,则这样的行只有一行,是因 A 中各行互异.设此行为 a,则 a 的后 $n-k+1$ 个数与第 $k+1$ 行的后 $n-k+1$ 个数不完全相同.在删除的 $n-k+1$ 列中补上相异两个数所在的列即可.

在本题的解答中,有两点是至关重要的:一是将原问题推广.否则,直接对 n 用数学归纳法,则在$(k+1)\times(k+1)$的好数表中难于构造出 $k\times k$ 的好数表;二是在推广命题的过程中,删去的是棋盘的 $n-m+1$ 列.若只删去棋盘的一列,则新

命题不成立.

4.2 数表的构造

所谓数表的构造,即讨论具有某种性质的数表是否存在,若存在,如何构造?解决这类问题,通常有三种方法:

(1) 找必要条件.假设数表存在,由此推出数表的若干性质(化归为以前的问题),具体操作手段有:

(i) 从整体入手(估计各局部和的总和,建立等式,然后利用等式).

(ii) 从个体入手(考察某个元素出现的次数,或考察某个特殊元素所在的位置).

(iii) 从局部入手(先讨论子表性质,然后逐步拼合,发现整体性质,导出矛盾或实现构造).

(2) 找充分条件.具体又有两个技巧:

(i) 固定部分元素,留下几个元素进行调整.在此基础上,设想一个充分条件,使数表在此条件下可以构造.

(ii) 先考察特殊情形,获取特殊情况下的一种充分条件,然后适当修正,得到一般情形下的一个充分条件.

(3) 等价转换,利用对应,将数表问题转化为其他形式的数学问题.注意到格可用点代替,从而数表常可用图来代替.

我们先介绍矩形数表中的有关问题与结果.为了叙述问题方便,先给出如下的概念.

定义 1 在 $m\times n$ 矩形数表中,每行(或列)中各个数的和称为"行(或列)和",第 i 行(或列)所有数的和称为第 i 个"行(或列)和".若所有"行(或列)和"都相等,则称之为"等行

(或列)和"的;若数表既等"行和"又等"列和",则称之为"等和的".

问题1 给定自然数 $r(r>1)$,对哪些自然数 p,由 $1,2,\cdots,pr$ 可构成一个 $p\times r$ 的等列和的数表?

此问题已被彻底解决,我们有如下命题:

命题1 对所有自然数 $r,p(r,p>1)$,当且仅当 $p(r+1)$ 为偶数时,由 $1,2,\cdots,pr$ 可构成一个 $p\times r$ 的等列和的数表.

证:为方便,记 $n=pr$.

必要性.我们证明 $p,r+1$ 中至少有一个为偶数.

实际上,若 $r+1$ 为偶数,则结论成立.不妨设 $r+1$ 为奇数,即 r 为偶数.注意到数表中所有数的和为:$S=1+2+\cdots+pr=\frac{pr(pr+1)}{2}$,于是每一个列和为 $\frac{p(pr+1)}{2}$.所以 $p(pr+1)$ 为偶数.但 $pr+1$ 为奇数,所以 p 为偶数.

充分性.当 $p(r+1)$ 为偶数时,我们可具体构造出合乎条件的 $p\times r$ 数表.这要分 p 的奇偶性讨论.

(1) 若 p 为偶数,令 $p=2k$,则按高斯方法排列即可.即每一行都是 r 个连续自然数,奇数行从左至右递增排列,偶数行从左至右递减排列.具体地说,表中的第一行从左至右依次为 $1,2,\cdots,r$;第二行从右至左依次为 $r+1,r+2,\cdots,2r$;第三行从左至右依次为 $2r+1,2r+2,\cdots,3r$;如此等等(图1).

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & \cdots & r \\
2r & 2r-1 & \cdots & r+1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(2k-2)r+1 & (2k-2)r+2 & \cdots & (2k-1)r \\
2kr & 2kr-1 & \cdots & (2k-1)r+1
\end{array}
$$

图 1

(2) 若 p 为奇数,则只须将表中前三行排成“等列和”数表即可,而后偶数行则按高斯方法排列.为了将表中的前三行排成“等列和”,只须将表中的前两行排成“列和”为 r 个连续自然数,再将第三行的 r 个连续自然数适当与前述“列和”搭配(最大的配最小的,次大的配次小的,如此等等).

注意到 $p(r+1)$ 为偶数,且 p 为奇数.所以,$r+1$ 为偶数,即 r 为奇数.令 $r=2k+1$,按“错 k 位”排列,则表中的“列和”适当排列后可构成公差为 1 的等差数列(图 2):

$$\begin{array}{llllllll}
k+1, & k+2, & \cdots, & r, & 1, & 2, & \cdots, & k \\
r+1, & r+2, & \cdots, & 2r-k & 2r+1-k, & 2r+2-k, & \cdots, & 2r \\
\hline
k+r+2, & k+r+4, & \cdots, & 3r-k & 2r+2-k, & 2r+4-k, & \cdots, & 2r+k
\end{array}$$

图 2

实际上,将各“列和”中的 k 还原成 $r\left(k=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\right)$,则各“列和”依次为:

$$\frac{3r+3}{2},\frac{3r+7}{2},\cdots,\frac{5r+1}{2},\frac{3r+5}{2},\frac{3r+9}{2},\cdots,\frac{5r-1}{2}.$$

上述问题的一个平凡推广是:

命题 1′ 对所有自然数 $r,p(r,p>1)$,当且仅当 $p(r+1)$为偶数时,由等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{pr}$可构成一个 $p\times r$ 的等列和的数表.

若将上述的等差数列换作高阶等差数列,便得到如下的问题:

问题 2 给定自然数 t.对哪些自然数 $r,p(r,p>1)$,由 t 阶等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{pr}$可构成一个 $p\times r$ 的“等列和”的数表?

问题 2 是一个难度相当大的问题,一个难度稍弱一点的

问题是:

问题3 对哪些自然数 $r,p(r,p>1)$,由 $1^2,2^2,\cdots,(rp)^2$ 可构成一个 $p\times r$ 的"等列和"的数表?

这个问题也有较大的难度,这从以下的 $p=2,r=4n$ 的情形即可看出.

命题2 由 $1^2,2^2,3^2,\cdots,(8n)^2$ 可构成一个 $4n\times 2$ 的"等列和"的数表.

解:我们先考察问题 $n=1,2$ 等的一些简单情形.

当 $n=1$ 时,将8个平方数按由小到大的顺序依次排成两行(图3),则图中括号内4个数之和等于另4个数之和.

$$\begin{array}{cccc} 1 & (4) & (9) & 16 \\ (25) & 36 & 49 & (64) \end{array}$$

图 3

于是,将1,36,49,16这4个数排成一列,另4个数排成一列,得到的数表合乎条件.

当 $n=2$ 时,由 $n=1$ 时的结论,只须考虑 $9^2,10^2,11^2,\cdots,16^2$ 的排列,我们期望有类似的排法:

$$\begin{array}{cccc} 81 & (100) & (121) & 144 \\ (169) & 196 & 225 & (256) \end{array}$$

上述排法可直接求和验证,也可采用技巧性验证:分别验证个位,十位,百位上数字和相等.实际上,

$$1+4+6+5=0+1+9+6,$$
$$8+4+9+2=0+2+6+5+(10),$$
$$0+1+1+2=1+1+1+2-(1),$$

于是,在 $n=1$ 的排法的基础上,再将81,196,225,144添入其中的一个列,另4个数添入另一个列,得到的数表合乎条件.

一般地,我们有如下排法:

$\|(n+1)^2\|$	$(n+2)^2$	$(n+3)^2$	$\|(n+4)^2\|$
$(n+5)^2$	$\|(n+6)^2\|$	$\|(n+7)^2\|$	$(n+8)^2$

此排法的合理性只须验证一个恒等式:

$$(n+1)^2+(n+6)^2+(n+7)^2+(n+4)^2$$
$$=(n+5)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+8)^2.$$

而由 $n=1$ 时的情形可知,上述恒等式只须验证两边各个一次项的和相等,而这是显然相等的.至此,命题 2 获证.

这里,我们仅仅验证了当 $4|r$ 时,由 $1^2,2^2,\cdots,(2r)^2$ 可构成一个 $2\times r$ 的等列和的数表.但当 $4\nmid r$ 时,由 $1^2,2^2,\cdots,(2r)^2$ 可否构成一个 $2\times r$ 的"等列和"的数表?这一点,希望读者进行研究.

将上述问题 1 从另一个角度进行推广,便得到如下的问题:

问题 4 当 m,n 为和值时,由 $1,2,\cdots,mn$ 可否构成一个 $m\times n$ 的"等和"数表?

此问题还没有完全解决.人们已经证明了如下的结论(此结果属于姚殿平):

命题 3 当 m,n 一奇一偶时,由 $1,2,3,\cdots,mn$ 构成的 $m\times n$ 数表不可能是"等和"的.

证:不妨设 m 为奇数,n 为偶数.反设 $m\times n$ 数表是"等和"的.因为数表中所有数的和为:$1+2+\cdots+mn=\dfrac{mn(mn+1)}{2}$,则每一个列和为 $\dfrac{mn(mn+1)}{2n}=\dfrac{m(mn+1)}{2}$.但 $m(mn+1)$ 为奇数,矛盾.

命题 4 当 m,n 中一个被 2 整除,另一个被 4 整除时,可由 $1,2,3,\cdots,mn$ 构成一个 $m\times n$ 的"等和"数表.

证：先按高斯方法构造如下一个数表(图 4)，表中的第一行从左至右依次为 $1,2,\cdots,n$；第二行从右至左依次为 $n+1$，$n+2,\cdots,2n$；第三行从左至右依次为 $2n+1,2n+2,\cdots,3n$．如此等等．

1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	$n-1$	n
$2n$	$2n-1$	$\cdots$	$2n+1-j$	$\cdots$	$n+2$	$n+1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(i-1)n+1$	$(i-1)n+2$	$\cdots$	$(i-1)n+j$	$\cdots$	$in-1$	in
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(m-i+1)n$	$(m-i+1)n-1$	$\cdots$	$(m-i+1)n+1-j$	$\cdots$	$(m-i)n+2$	$(m-i)n+1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
mn	$mn-1$	$\cdots$	$mn-j+1$	$\cdots$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+1$

图 4

数表 A 是“等列和”的，每个“列和”为 $\frac{m(mn+1)}{2}$．为了使之变为等和数表，可适当交换同一列中的数的位置，可保持列和不变，而使行和相等．注意到当 $i=1,2,\cdots,\frac{m}{2}$ 时，数表中的第 $m-i+1$ 个行和比第 i 个行和多

$$\frac{n[(m-i)n+1+(m-i+1)n]}{2}-\frac{n[(i-1)n+1+in]}{2}$$

$$=\frac{n^2(2m-2i+1)+n}{2}-\frac{n^2(2i-1)+n}{2}=n^2(m-2i+1),$$

且第 $m-i+1$ 个行和与第 i 个行和的和为 $n(1+mn)$．于是，将第 $m-i+1$ 行与第 i 行中的第 j 列的两个数对调，则第 i 个行和增加 $[(m-i+1)n-j+1]-[(i-1)n+j]=mn-2in+2n-2j+1$．

由上可知，只要通过对调第 i 行与第 $m-i+1$ 行的一些

列的对应两个数，使第 i 个行和增加$\frac{n^2(m-2i+1)}{2}$，则这两行的行和就变得相等了．现在，依次对调这两行中第$\frac{n}{4}+1$列至第$\frac{3n}{4}$列的对应两个数，则第 i 个行和增加

$$\sum_{j=1}^{3n/4}(mn-2in+2n-2j+1)=\frac{n^2(m-2i+1)}{2}.$$

对 $i=1,2,3,\cdots,\frac{m}{2}$，都进行上述对调后，数表便变为等和数表．证毕．

命题5 当 $m\equiv n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$时，可由 $1,2,3,\cdots,mn$ 构成一个 $m\times n$ 的等和数表．

证：令 $m=4k+2, n=4p+2$，将 $1,2,\cdots,(4k+2)(4p+2)$ 划分为如下三个集合：

$$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4k(2p+1), x\in N\},$$

$$B=\{x\mid 4k(2p+1)+1\leqslant x\leqslant(2k+2)(4p+2), x\in N\},$$

$$C=\{x\mid(2k+2)(4p+2)+1\leqslant x\leqslant(4k+2)(4p+2), x\in N\}.$$

先排一个$(4p+2)\times 4k$ 的数表(Ⅰ)．此表的前 $2p+1$ 行由 A 中的数按高斯方法排成：第一行从左至右依次为 $1,2,\cdots,4k$；第二行从右至左依次为 $4k+1,4k+2,\cdots,8k$；……；第 $2p+1$ 行从左至右依次为 $2p\times 4k+1,2p\times 4k+2,\cdots,2p\times 4k+4k$．表(Ⅰ)的后 $2p+1$ 行由 C 中的数按高斯方法排成：第 $2p+2$ 行从右至左依次为$(2k+2)(4p+2)+1,(2k+2)(4p+2)+2,\cdots,(2k+2)(4p+2)+8k$；……；第 $4p+2$ 行从右至左依次为：$(2k+2)(4p+2)+2p\times 4k+1,(2k+2)(4p+2)+2p\times 4k+2,\cdots,(2k+2)(4p+2)+2p\times 4k+4k=4(k+1)(2p+1)+(2p+1)4k$（见图5）：

$1,$	$2,$	$\cdots$	$4k;$
$8k,$	$8k-1,$	$\cdots$	$4k+1;$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$2p\times4k+1,$	$2p\times4k+2,$	$\cdots$	$2p\times4k+4k;$
$(2k+2)(4p+2)+8k,$	$(2k+2)(4p+2)+2,$	$\cdots$	$(2k+2)(4p+2)+1;$
$4(k+1)(2p+1)+4k+1,$	$4(k+1)(2p+1)+4k+2,$	$\cdots$	$4(k+1)(2p+1)+8k;$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots\cdots$
$4(k+1)(2p+1)+4k(2p+1),4(k+1)(2p+1)+4k(2p+1)-1,\cdots4(k+1)(2p+1)+8kp+1.$			

图 5(表I)

用类似于命题3的方法,可以证明:表(I)经过对调第 $k+1$ 列到第 $3k$ 列的第 j 行与第 $4p+2-j+1$ 行的对应两个数($j=1,2,\cdots,2p+1$),得到的表记为(II),则表(II)是等和的.

将数表(II)转置,则得到一个 $4k\times(4p+2)$ 的等和数表(II′).(II′)的每个行和为

$$[1+(4p+2)(4k+2)](2p+1)=\frac{n(mn+1)}{2}.$$

最后,将 B 中的数按高斯方法排成一个 $2\times(4p+2)$ 的数表(III),见图6.

$4k(2p+1)+1$	$4k(2p+1)+2$	$\cdots$	$4k(2p+1)+4p+1$	$4k(2p+1)+4p+2$
$(2k+2)(4p+2)$	$(2k+2)(4p+2)-1$	$\cdots$	$4k(2p+1)+4p+4$	$4k(2p+1)+4p+3$

图 6(表III)

数表(III)是等列和的,每个列和为 $4k(2p+1)+4k(2p+1)+2(4p+2)+1$,两个行和之差为 $4(2p+1)^2$.下面依次对调数表(III)中同一列中的两个数的位置:

(a)第1与第 $4p-1$ 列;(b)第 $4,8,12,\cdots,4(p-1)$ 列;(c)第 $5,9,13,\cdots,4(p-1)+1$ 列.

在上述几个操作下,第一个行和相应地增加了:

(a) $(8p+5-2\times1)+[(8p+5)-2(4p-1)]=8p+10;$

(b) $\sum_{i=1}^{p-1}[(8p+5)-2\times 4i]=(p-1)(4p+5)$;

(c) $\sum_{i=1}^{p-1}[(8p+5)-2\times(4i+1)]=(p-1)(4p+3)$.

这样，第一个行和共增加了$(8p+10)+(p-1)(4p+5)+(p-1)(4p+3)=2(2p+1)^2$. 于是，表(Ⅲ)操作后得到的数表，记为表Ⅲ′，是等和的，其每一个行和为$\frac{n(1+mn)}{2}$.

因此，将表Ⅱ′和Ⅲ′合并成一个$(4k+2)\times(4p+2)$的大数表，大数表的前$4k$行由数表Ⅱ′构成，后两行由数表Ⅲ′构成. 易知此大数表是"等和"的. 证毕.

当m,n为奇数时，相应的$m\times n$"等和"数表是否存在？这还是一个悬而未决的问题.

问题1还可以从其他角度进行推广，比如，我们可以提出如下的问题：

问题5 给定自然数r，问有哪些自然数m,n，使$1,2,3,\cdots,mn$可以排成一个$m\times n$数表，且对表中任何一列，前$m-1$个数的和是第m个数的r倍？

此问题的容量是相当大的. 我们只知道一些个别情形，比如下面的命题6，它是1990年IMO国家集训队的训练题.

命题6 $1,2,3,\cdots,3n$可以排成一个$3\times n$数表，使表中任何一列的前两个数的和是第三个数的三倍，则n的最小两个取值为5,8.

证：数表中所有数的和为：$S=1+2+3+\cdots+3n=\frac{3n(3n+1)}{2}$.

另一方面，设数表中第j列中的三个数依次为x_j,y_j,z_j，由条件，$x_j+y_j=3z_j$，于是数表中所有数的和为

$$S=\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j+z_j)=4\sum_{j=1}^{n}z_j.$$

所以,$4\mid S=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$,即 $8\mid 3n(3n+1)$.

当 n 为奇数时,$(8,3n)=1$,有 $8\mid 3n+1$; ①

当 n 为偶数时,$(8,9n+3)=1$,有 $8\mid n$. ②

由①可知,若 n 为奇数,则 $n\geqslant 5$,且 $n\neq 7$.由②可知,若 n 为偶数,则 $n\geqslant 8$.所以,n 的可能取值为 5,8,11,…

当 $n=5$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=\dfrac{S}{4}=30$.

注意到 $4+5+6+7+8=30$,可令 $z_i=4,5,6,7,8$ 尝试构造,得数表(图 7):

1	2	3	9	10
11	13	15	12	14
4	5	6	7	8

图 7

当 $n=8$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=\dfrac{S}{4}=75$.

注意到 $6+7+8+\cdots+13=76=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i+1$,可令 $z_i=5,7,8,\cdots,13$ 尝试构造,得合乎条件的数表(图 8),命题 6 获证.

1	2	3	4	6	15	16	17
14	19	21	23	24	18	20	22
5	7	8	9	10	11	12	13

图 8

对于问题 5,即使是上述 $m=r=3$ 的特殊情形,我们亦没有彻底解决,因为我们并不知道,n 为哪些自然数时,由 1,2,…,$3n$ 可排成合乎条件的数表.

问题 6 有哪些自然数 m,n,使 1,2,3,…,mn 可以排成一

个 $m\times n$ 数表,且表中所有的"行和"与"列和"都为 2 的方幂?

此问题的难度是很大的.我们只知道 m,n 满足的一个必要条件是 $m\neq n$.实际上,我们有如下命题:

命题 7 设 $n>1$,n 为自然数,则 $1,2,3,\cdots,n^2$ 不能排成一个 $n\times n$ 的数表,使每个行和与每个列和都为 2 的方幂.

证:用反证法.假设可以按要求排列,设最小的一个行的和为 2^t,则 $2^t\geqslant 1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.依题意,表中所有数的和可以分拆成 k 个 2 的方幂的和,其中最小的一个方幂为 2^t.于是,

$$2^t\mid 1+2+\cdots+k^2,\text{即 } 2^t\mid k^2\cdot\frac{k^2+1}{2}. \qquad (*)$$

(1) 若 k 为奇数,则 $k^2\cdot\frac{k^2+1}{2}$ 亦为奇数,与$(*)$矛盾.

(2) 若 k 为偶数,则 k^2+1 为奇数,$(2^t,k^2+1)=1$,所以,$2^t\mid\frac{k^2}{2}$.但 $\frac{k^2}{2}<\frac{k(k+1)}{2}\leqslant 2^t$,矛盾.

问题 7 能否在 $m\times n$ 棋盘中填入互异的平方数,使每行每列之和仍为平方数?

此问题的答案是肯定的.

先看 2×2 棋盘.为了使"行和"为平方数,利用勾股数,可这样构造数表(图 9):

9	16
9	16

图 9

$9a^2$	$16a^2$
$9b^2$	$16b^2$

图 10

再考虑"列和"为平方数.引入参数 a,b(如图 10),只须使 $a^2+b^2=c^2$,且 $16a^2<9b^2$.取 $a=6$,$b=8$,得到合乎条件的数表

(图 11).

9×36	16×36
9×64	16×64

图 11

a^2	b^2	c^2
a^2	b^2	c^2

图 12

再看 2×3 棋盘.假设填入两行相同的平方数 a^2,b^2,c^2(图 12).为了使"行和"为平方数,可适当选择 c,使 $a^2+b^2+c^2$ 为平方数.

(1) 若 a,b 都为偶数,设 $a^2+b^2=4k+4$,令 $c=k$,则 $a^2+b^2+c^2=k^2+4k+4=(k+2)^2$;

(2) 若 a,b 一奇一偶,$a<b$,设 $a^2+b^2=2k+1$,令 $c=k$,则 $a^2+b^2+c^2=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

作修正表(构造中,只须取上述的一种情况即可.而取第二种情况时表中的填数较小,见图 13):

x^2a^2	x^2b^2	x^2c^2
y^2a^2	y^2b^2	y^2c^2

图 13

令 $x^2+y^2=z^2$,并取 x 为奇数,设 $x=2k+1$,则取 $y=k$ 即可.

一般地,不妨设 $m\leqslant n$.取 $a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}(n>1)$为平方数,其中 a_1 为奇数,$a_1\geqslant3$,$a_2<a_3<\cdots<a_{n-1}$为偶数.那么,$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2$为奇数,设为 $2k+1$.归纳定义:$a_n=k$,则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=2k+1+k^2=(k+1)^2$.且

$$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<k=a_n.$$

否则,若有 $a_i\geqslant k(i<n)$,那么 $2k+1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2\geqslant a_i^2=k^2$,所以 $k<3$,矛盾.

这样,图 14 所示的数表中每一行的数互异,且各行的和为平方数.

$$b_1^2a_1^2 < b_1^2a_2^2 < \cdots < b_1^2a_n^2$$

$$b_2^2a_1^2 < b_2^2a_2^2 < \cdots < b_2^2a_n^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m^2a_1^2 < b_m^2a_2^2 < \cdots < b_m^2a_n^2$$

图 14

下面选择 b_i，使 $b_i^2a_n^2 < b_{i+1}^2a_1^2$，且 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$ 为平方数.

取 b_1 为奇数，$b_2,\cdots,b_m$ 为偶数，且 $b_{i+1} > \frac{b_ia_n}{a_1}$ $(i=1,2,\cdots,m-2)$. 若 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{m-1}^2=2s+1$，定义 $b_m=s$，则得到的数表合乎题目要求.实际上，

$$b_m = s \frac{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{m-1}^2-1}{2} \geqslant \frac{b_{m-1}^2}{2} > \frac{b_{m-2}a_nb_{m-1}}{2a_1}$$

$$\geqslant b_{m-2}\cdot\frac{a_nb_{m-1}}{2a_1} \geqslant \frac{a_nb_{m-1}}{a_1}.$$

下面再给出若干矩形数表构造的例子.

例 1 $m\times n$ 矩形被划分为 mn 个单位正方形，对每个单位正方形，将其边用 1,2,3,4 编号，要求对任何有公共边的单位正方形，其公共边上的编号相同，每个单位正方形的四边分别编号为 1,2,3,4.对 $m\times n$ 矩形，它的同一条边上的单位线段的编号都相同，且它的四边上也分别编号为 1,2,3,4.求 m,n 的所有可能取值.

解:从特例出发.

如图 15，$m=n=1$ 时，显然可行；$m=1,n=2$ 时，不可；$m=1,n=3$ 时，可行.

如此下去，可知 $m=1$ 时，n 为奇数可行；n 为偶数不可.

再看 $m=2$.同样研究可知，n 为奇数不可，n 为偶数时可行.

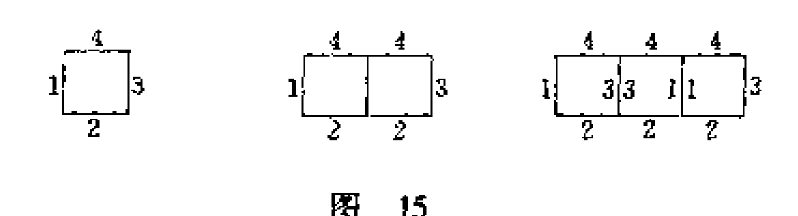


图 15

猜想 对任何自然数 m,n,当 $m+n$ 为奇数时不可,$m+n$ 为偶数时可行.

证明:当 $m+n$ 为奇数时,不妨设 m 为奇数,n 为偶数.考察 $m\times n$ 矩形中某条长为 m 的边上的编号,设其编号为 1.我们来计算棋盘中编号 1 出现的总次数 S.

一方面,设棋盘内部有 r 条单位线段是编号为 1 的,但每条线段是两个单位正方形的边,被编上了两个 1,于是棋盘内部 1 出现的次数为 $2r$.又棋盘边界上 1 出现的次数为 m,所以 $S=m+2r$.注意到 m 为奇数,从而 $S=m+2r$ 为奇数.

另一方面,$m\times n$ 矩形共有 mn 个单位正方形,每个单位正方形上有一个 1,于是 $S=mn$ 为偶数,矛盾.

当 $m+n$ 为偶数时,有以下两种情况:

(1) m,n 都为奇数,可如下构造:先将一个单位正方形连续翻转 $n-1$ 次,得到 $1\times n$ 矩形,再将此 $1\times n$ 矩形沿长为 n 的边连续翻转 $m-1$ 次,即得到合乎条件的 $m\times n$ 矩形.

(2) m,n 都为偶数,可如下构造:先将四周编号 1,2,3,4.再分别在棋盘中分割出左上角的 $(m-1)\times(n-1)$ 矩形,右上角的 $(m-1)\times 1$ 矩形,左下角的 $1\times(n-1)$ 矩形,右下角的 1×1 矩形(图 16).这四个矩形均可按(1)中的方法编号,并适当对各个矩形的边编号,使它们可构成如图 16 所示的合乎条件的 $m\times n$ 矩形.

例 2 将 1×2 卡片的两个格分别填上 1 和 -1,再将这些卡片拼成 $5\times n$ 棋盘,使每行每列的积为正,求 n 的所有可能取

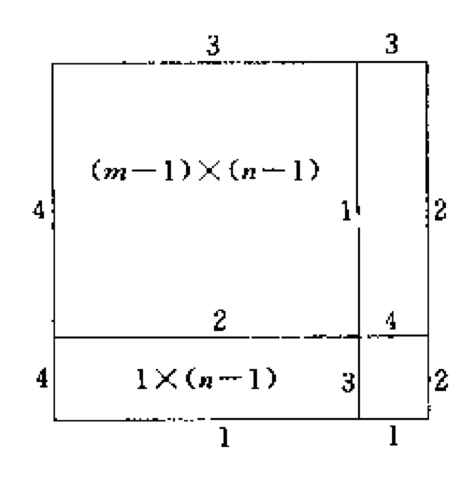


图 16

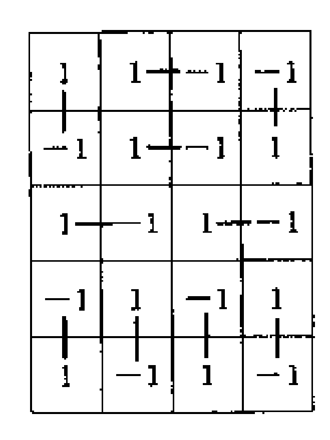


图 17

值.(第 26 届莫斯科数学竞赛题)

解:$5\times n$ 棋盘有 $5n$ 个格,但每个卡片有两个格,于是 $5n$ 为偶数,即 n 为偶数.又棋盘中各数之积为正,所以,其中 -1 的个数为偶数,即有偶数张卡片.于是格的总数 $5n$ 为 4 的倍数,即 n 为 4 的倍数.

反之,当 n 为 4 的倍数时,将 $5\times n$ 棋盘划分为若干个 5×4 棋盘,每个 5×4 棋盘均按图 17 所示方法填数即可.故一切 4 的倍数即为所求.

例 3 在 100×100 棋盘上,每个格填上 a,b,c 之一,能否使任何一个 3×4 矩形内均有 3 个 a,4 个 b,5 个 c?

解:稍作试验,便可猜出问题的答案是否定的.

先研究局部性质.考察两个 3×4 矩形,它们有一个公共的 3×3 正方形(图 18),则剩下的两个 1×3 矩形内所填的数 a,b,c 的个数分别相等,我们称这样的两个图形为同数的.这样,每个 1×3 矩形平移 4 个单位后便得到一个与之同数的矩形(图 19).

由此,我们发现,任何 1×12 矩形必有其上方或下方一个 3×4 矩形与之同数.

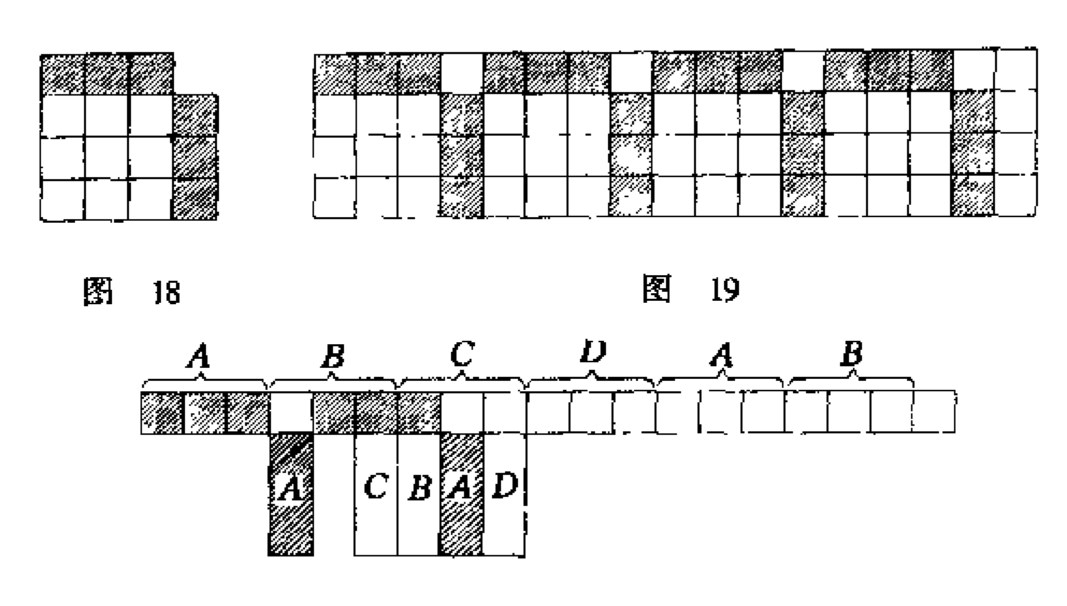


图 18　　　　　　图 19

图 20

实际上,1×12 矩形可以划分为 4 个 1×3 矩形 A,B,C,D. 不妨设 1×12 矩形下方有 4 行,则 A,B,C,D 分别与下方一些 3×1 矩形同数(图 20).由此可知,任何 1×12 矩形中有 3 个 a,4 个 b,5 个 c.

将 3×4 矩形划分为 4 个 1×3 矩形,将 5 个 c 归入这 4 个矩形,必有一个 1×3 矩形 x 含有两个 c.以此 1×3 矩形 x 的格为前 3 个格,将其扩充为一个 1×12 矩形,其中必包含 3 个与 x 同数的矩形,于是,此 1×12 矩形中有 6 个 c,矛盾.

最后给出若干非矩形数表构造的例子.

例 4　设点 O 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心,用 $1,2,\cdots,n$ 将它的各边编号,又用这些整数将 $OA_1,OA_2,\cdots,OA_n$ 编号,是否存在一种编号方法,使各个三角形 OA_iA_{i+1} 各边上各数之和相等?

解:考察一种合乎条件的编号方法,设 OA_i 上的编号为 a_i,边 A_iA_{i+1} 上的编号为 b_i,三角形 OA_iA_{i+1} 各边上的编号之和为 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $S_1=S_2=\cdots=S_n=S$.

现在,将各个"局部和"相加,得

$$
\begin{aligned}
nS &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\
&= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= 2(1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n) \\
&= 3(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

(其中注意到各边 A_iA_{i+1} 恰属于一个三角形,而 OA_i 恰属于两个三角形,被计数两次.)所以,$2S = 3(n+1)$,从而 $n+1$ 为偶数,即 n 为奇数.

反之,当 n 为奇数时,不难构造出合乎条件的编号.实际上,令 $n = 2k+1$,则 $S = 3k+3$.我们先固定部分元素:将多边形的各边依次编号为 $1,2,\cdots,2k+1$,再编好 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{2k+1}$ 中 $2k+1$ 所在的边(在此之后,其他边的编号唯一确定).注意到 $2k+1$ 应编在"和"最小处,即 1,2 所在的边之间,由此便得到一种编号方法.比如 $n=5$ 时的编号如图 21 所示.

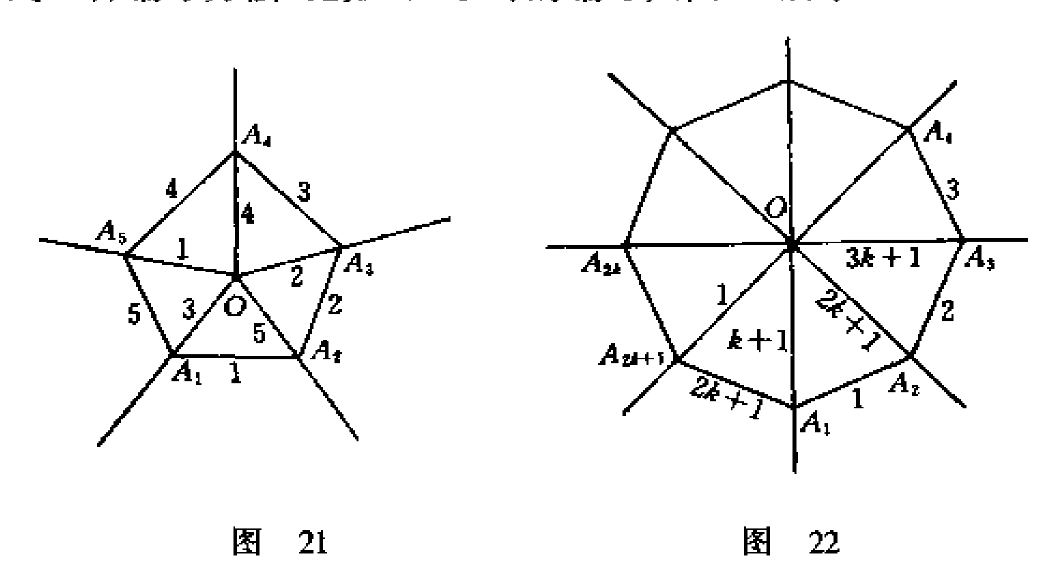


图 21　　　　图 22

观察图 21,可发现此编号中多边形各边上的编号按逆时针方向依次为 $1,2,\cdots,2k+1$,而 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{2k+1}$上的编号由 $1,2,\cdots,2k+1$ 跳跃进行,即每隔一条线段编一个号.但跳跃编

号法的合理性不易证明.通过进一步观察,发现多边形内 OA_1, $OA_2,\cdots,OA_{2k+1}$上的编号依次构成一个"模等差"数列:$\overline{2k+1}$, $\overline{3k+1}$,$\overline{4k+1}$,$\cdots$,$\overline{(2k+2)k+1}$,其中 $\overline{a}$ 表示 a 关于模 $2k+1$ 的最小非负剩余.由此可将编号方法改进为:A_iA_{i+1}上编号 i, OA_i 上编号$\overline{ik+1}$(图 22).

下面证明这种编号合乎要求:

考察第 i 个三角形,三边上的编号为 i, $\overline{ik+1}$, $\overline{(i+1)k+1}$.我们只须证明:

$$i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=\frac{3(n+1)}{2}=3k+3.$$

只要证:$i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}\equiv 3k+3$,且 $k+2<i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}<(3k+3)+(2k+1)=5k+4$.

令 $i+\overline{ik+1}=r$ $(0<r\leqslant 2k+1)$,$i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=S$.

若 $r\leqslant k+1$,则 $S=i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=i+r+\overline{r+k}=i+r+(r+k)\leqslant(2k+1)+2(k+1)+k=5k+3$.

$S=i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=i+r+\overline{r+k}=i+r+(r+k)>k+2$;

若 $r\geqslant k+2$,则 $S=i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=i+r+[r+k-(2k+1)]\leqslant i+r+k\leqslant(2k+1)+(2k+1)+k=5k+2$,

$S=i+\overline{ik+1}+\overline{(i+1)k+1}=i+r+\overline{r+k}>r\geqslant k+2$.

综上所述,所求的 n 为一切大于 1 的奇数.

例 5 n 为何值时,可以在正 C_n^2 边形的每个顶点上放置 $1,2,\cdots,n$ 中的一个数,使每一对数 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$,都可以找到多边形的一条边,此边两端点上填的数分别为 i 和 j.(1963 年全俄数学竞赛题)

解:注意到此题中每个数在多边形上不止出现一次,从而

可以先考虑每个元素出现的次数,由此发现可能的构造.

考察其中一个数 i,含 i 的数对有 $n-1$ 个,这 $n-1$ 个数对必须在多边形的边上出现(至少出现 $n-1$ 次?).又顶点上的每一个数 i,最多与它的两个邻点上的数构成两个数对,从而每个数 i 至多出现在两个数对中.这样,数 i 在多边形中出现的次数必不少于$\frac{n-1}{2}$.

(1) 若 n 为偶数,则每个数 i 至少出现$\frac{n}{2}$次.这样,n 个数共至少出现 $n\times\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$次.所以,多边形至少有$\frac{n^2}{2}$个顶点.但$\frac{n^2}{2}>C_n^2$,矛盾.从而 n 为偶数时,不存在合乎条件的编号.

(2) 若 n 为奇数,则任何数 i 至少出现$\frac{n-1}{2}$次.这样,n 个数至少占住$\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2$ 个顶点.此时,每个数对恰好出现一次,由此可以构造出合乎条件的编号.

我们先把 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 放好.对任何一个数对 i,j 都连一条线段,此线段对应多边形的一条边.这些边依次连成一个长为 C_n^2 的圈.由于每个数对形成的边都恰好走一次,从而此圈是一个 n 阶完全图中的欧拉圈.注意到 n 为奇数,从而完全图中每个点的度为偶数,所以,欧拉圈存在,从而合乎条件的编号存在.

例 6 正 1983 边形顶点上分别放数 $1,2,\cdots,1983$.它的一条对称轴 a 称为好的,如果 a 的一侧的每一个数都大于关于 a 对称的点上的数.试问:能否适当填数,使多边形的每条对称轴都是好的?(1983 年第 46 届莫斯科数学竞赛题)

解:结论是肯定的.

不妨设顶点 A 填数 1983,经过 A 的对称轴为 a_1.多边形的

顶点按逆时针方向依次填数 1983, $x_1, x_2, \cdots, x_{991}, y_{991}, y_{990}, \cdots, y_1$. 那么, a_1 为好的一个充分条件是:对任何 $i=1,2,\cdots,991$, 有 $x_i > y_i$.

再取过 y_{991} 的对称轴 a_2, 由于 $1983 > x_1$, 于是, a_2 为好轴的一个充分条件是: $y_1 > x_2, y_2 > x_3, \cdots, y_{990} > x_{991}$. 于是, $1983 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \cdots > x_{991} > y_{991}$. 易知,上述填数合乎要求,从而填法存在且是唯一的.

例 7 将 $k \times k \times k$ 立方棋盘的格二染色,使任何一格都恰有两个相邻的格(具有公共面)同色,求 k 的所有可能取值.(第 9 届前全苏数学竞赛题)

解:所求的 k 为偶数.

(1) 设 k 为奇数.若存在合乎要求的染色,将同色的相邻两格用该两格的颜色的线段连接.这样,各个格都引出两条线段.由图论的知识可知,它们构成若干个圈.考察每一个圈,它在横,纵,竖三个方向上的线段各有偶数条,是因从一点出发要回到出发点,从而每个圈有偶数条线段.于是,每个圈有偶数个点,即有偶数个格.由此可知,棋盘共有偶数个格,矛盾.

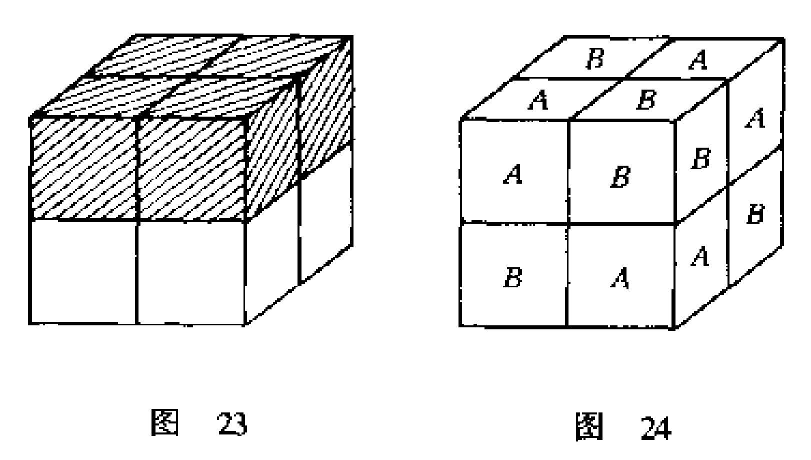


图 23　　　　图 24

(2) 设 k 为偶数.先构造 $2 \times 2 \times 2$ 棋盘,并将其格染黑白二色之一,使上方四格同色,下方四格同另一色(图 23).称上方

四格为黑色的棋盘是 A 类盘，上方四格为白色的棋盘为 B 类盘．现将 $k\times k\times k$ 棋盘划分为若干个 $2\times2\times2$ 棋盘，对每个 $2\times2\times2$ 棋盘都按图 24 的方式染色，使每个 $2\times2\times2$ 棋盘都是 A 类盘或 B 类盘，且任何两个相邻的 $2\times2\times2$ 棋盘不同类．这样得到的染色合乎条件(图 24)．

例 8 MO 牌足球由若干多边形皮块用 3 种不同的丝线缝制而成．(1)任何多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块的同样长的一条边用同一种丝线缝合．(2)足球上每一结点恰好是三个多边形的顶点．相会于同一结点的三条丝线不同色．求证：可以在每个结点上放置一个不等于 1 的复数，使每个多边形结点上的数的积都为 1．(第 6 届 CMO 试题)

证：本题在当年近 90 名选手中，仅有 4 人作对了此题，得分率出乎意料的低．可见这一构造性问题在当年有相当的难度．但只要尝试一些特殊情况，猜出其答案并不是很难的．

注意，本题只要求我们找到一种放数的方法，即找一个使结论成立的充分条件，不妨从特殊情形入手．

考察四面体 $ABCD$．设四顶点所填的数分别为 a,b,c,d，则

$$abc=bcd=cda=dab=1. \quad ①$$

由 $abc=1$，得 $abcd=d$．同理，$a=abcd$，$b=abcd$，$c=abcd$．所以，$a=b=c=d$，将之代入①，得 $a=b=c=d=\omega$ 或 ω^2，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$．

对一般情况，各顶点所填的数未必相等，比如正方体．于是只能是有些顶点上填数 ω，有些顶点上填数 ω^2．那么，哪些顶点上填数 ω，哪些顶点上填数 ω^2？我们还是先看看特殊情况．考察正方体 $ABCD-A'B'C'D'$．

由于正方体有12条棱，染3色，至少有一种颜色染了4条棱，这四条棱不能相交，只能平行或异面。于是想到将4条两两平行的棱染同一色，得到正方体的棱的染色方法(图25)。现在，在正方体各顶点处放数 ω 或 ω^2。显然，同一个面正方形相对顶点上放的数相同时，放的数合乎要求。此时，我们来观察所有放数 ω 的顶点。想象一个人站在正方体的中心看这些顶点，则这些顶点处3条棱的颜色按逆时针方向分别为1,2,3色。而放 ω^2 的顶点处3条棱的颜色按逆时针方向依次为3,2,1色。

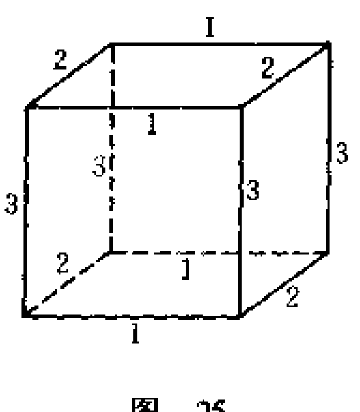


图 25

由上可以想到：对一般多面体，应将其顶点分为两类：从多边形的内部观察各结点处三条边的颜色，若按逆时针方向排成1,2,3色，则称为第一类结点，否则称为第二类结点。在第一类顶点处放数 ω，第二类顶点处放数 ω^2。下面证明这种放数方法合乎要求。

观察第一类顶点处所放数 ω^k 的指数 $k(k=1,2)$，想象某点分别沿含此顶点的每个多边形的边按逆时针方向运动，则 k 恰好是后一条边的颜色的代号与前一条边的颜色的代号的比(图26)。于是，若将第 i 色的边用 ω^i 代替，即第 i 色边上放数 ω^i，则第一类顶点处所放的数恰好是后一条边上所放的数与前一条边上所放的数的比。这种规律同样适合第二类顶点(图27)。于是，对多面体的每一个多边形来说，每个顶点上所放的数恰好是后一条边上所放的数与前一条边上所放的数的比。设多边形各边上放的数依次为 z_1，

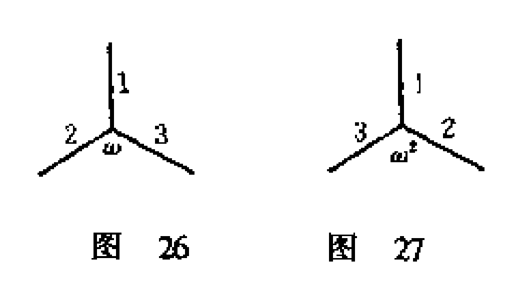


图 26　　图 27

$z_2, \cdots, z_n$,那么,各顶点上所放的数依次为$\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_2}, \cdots, \frac{z_n}{z_{n-1}}, \frac{z_1}{z_n}$.故它们的积为1.命题获证.

例9 设G是有k条边的连通图,用$1,2,\cdots,k$给各边编号.求证:可以使至少引出两条边的顶点引出的边上的编号的最大公约数为1.(第32届IMO试题)

证:为了叙述问题方便,若图中某个顶点只引出一条边,或此顶点引出的各边上的编号互质,则称此顶点是好的.

同上例,我们先考察一些特殊情况.什么样的连通图是最简单的连通图?——"链".对于链,只须依次将各边编号为1,2,…,k.这是因为:除首尾两个结点外,其他结点都引出两条边,且其编号是两个连续的自然数,当然互质.而首尾两个结点都只引出一条边,也是好顶点.

进一步,一个圈也可按类似的方法编号(稍复杂一点的图).

再进一步,如果图由两个圈构成,则可先将一个圈按上述方法编号,由于图是连通的,另一个圈必有一条边与前一个圈的一条相邻.再从此边出发按上述方法编号即可.

一般地,我们可这样对图的边编号:从任意一个结点A_1出发,沿着边前进,直至不能再前进为止.设最后到达的位置为A_2.按所通过边的先后次序,将各边依次编号为$1,2,\cdots,r_1$.我们证明:编号后,所通过的所有点都是好的.实际上,考察所通过的任意一个点P.若$P=A_1$,则P有一条边编号为1,P是好的;若$P=A_2$,则因为到达A_2后不能再前进,要么A_2只引出了一条边,要么它引出至少两条边,则必有两条边被编号为连续的自然数,所以,P是好的.对于P的其他情形,P在编号中至少有它引出的两条边被编号为连续的自然数,所以P是好的.

如果所有的边都已编号，则结论成立；若还有一些边没有编号，但图是连通的，剩下的边必有一条与已编号的边相邻．再从这条边出发，沿边前进，直至不能再前进为止，设此时到达的点为 A_3．同样，按通过边的先后次序将各边依次编号为 $r_1+1, r_1+2, \cdots, r_2$．我们证明：第二次编号后，先后两次通过的所有点都是好的．实际上，考察第一次通过的点中的任意一个点 Q．如果 $Q=A_1$，则 Q 引出的边中有一条被编号 1，从而 Q 是好的．如果 $Q=A_2$，由于第一次编号到达 Q 后不能再前进，所以第二次编号没有编 Q 引出的边．所以，Q 仍然是好的．对于 Q 的其他情形，Q 在第一次编号中至少有它引出的两条边被编号为连续的自然数，所以，Q 仍是好的．对于第二次编号中新通过的顶点 Q，若 $Q=A_3$，则因为到达 A_3 后不能再前进，要么 A_3 只引出了一条边，要么它引出至少两条边，且有两条边被编号为连续的自然数，所以，Q 是好的．对于 Q 的其他情形，Q 在第二次编号中至少有它引出的两条边被编号为连续的自然数，所以 Q 是好的．如果所有的边都已编号，则结论成立；若还有一些边没有编号，则继续上述工作，直至所有的边都编上号，故命题成立．

例 10 是否可以在正 n 边形各顶点填上互异的非零数，使得任何部分顶点为顶点的正多边形的顶点上各数和都为 0？(第 34 届莫斯科数学竞赛题)

解：结论是肯定的．由“正 n 边形各个顶点处放的数的和为 0”，想到正多边形的一个性质：从中心出发且指向各个顶点的 n 个向量之和为 0．如果以 O 为坐标原点建立直角坐标系，则各个顶点的纵坐标之和为 0．这样，将各个顶点处放置该点的纵坐标即可使各正多边形的顶点处放置的数的和为 0．此外，还要使放的数非 0 且互异，即应使各个点的纵坐标非 0 且互异．找一个充分条件：适当选取 x 轴，使 x 轴不与多边形的任何边和

任何对角线平行，且不过任何顶点.

通过以上的分析，我们需要证明如下的结论：

设 O 是复平面上正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，则

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}=0.$$

实际上，设 $\overline{OA_n}=z$，$\angle A_1OA_2=\theta$，则 $OA_k=z(e^{i\theta})^k$，所以，

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}=z\sum_{k=1}^{n}(e^{i\theta})^k=\frac{z[1-(e^{i\theta})^n]}{1-e^{i\theta}}=0.$$

现在，以正多边形的中心为原点，适当选取 x 轴，使 x 轴不与多边形的任何边和任何对角线平行，且不过任何顶点，则多边形的各个顶点的纵坐标非零且互异．由上述结论，得

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{OA_k}=0,\text{所以},\sum_{k=1}^{n}y_k=0.$$

于是，在顶点 A_k 上放置数 y_k 即可.

例 11　对怎样的 n，可在前 $n+1$ 个自然数中选取 n 个数排成一圈，使每两个相邻的数的差的绝对值互异？

解："互异"是一个题眼．若干个数互异，常常分析这 n 个数的存在域．如果这 n 个互异的自然数都不大于 n，则它们是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．进而可考察它们的和.

将问题具体化：令圆周上 n 个数依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，令 $b_i=|a_{i+1}-a_i|$（$i=1,2,\cdots,n$ 且 $a_{n+1}=a_1$）．估计 b_i 的存在域，有 $b_i=a_{i+1}-a_i\leqslant n+1-a_i\leqslant n+1-1=n$ 或 $b_i=a_i-a_{i+1}\leqslant n+1-a_{i+1}\leqslant n+1-1=n$．由条件，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 互异，所以，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．所以，$b_1+b_2+\cdots+b_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，即

$$n(n+1)=2(b_1+b_2+\cdots+b_n).\qquad ①$$

下面对①进行讨论，以求出 n．奇偶分析：

$b_i=|a_{i+1}-a_i|\equiv a_{i+1}-a_i \pmod 2$. 所以 $\Sigma b_i\equiv\Sigma(a_{i+1}-a_i)\equiv 0 \pmod 2$, $4|n(n+1)$.

当 n 为奇数时, $(4,n)=1$, 所以 $4|n+1$, $n=4k-1(k\in N)$; 当 n 为偶数时, $(4,n+1)=1$, 所以, $4|n$, $n=4k(k\in N)$.

反之, 若 $n=4k$, 我们来建立合乎条件的排法. 令 $A=\{b_1,b_2,\cdots,b_{4k}\}=\{1,2,\cdots,4k\}$, $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_{4k}\}$.

首先, $4k\in A$, 即存在 $|a_i-a_{i+1}|=4k$. 但 $a_i\leqslant 4k+1$, 可知, $4k+1\in B$, 且 1 与 $4k+1$ 相邻. 又 $4k-1\in A$, 所以, 1 与 $4k$ 相邻或 2 与 $4k+1$ 相邻. 不论那种情形, 都是跳跃地出现连续自然数. 今选取前一种情形, 可想到将 $1,2,\cdots,2k$ 逆时针排列一圈, 然后在 $2k$ 与 1 之间插入 $4k+1$, 在 i 与 $i+1$ 之间插入 $4k+1-i(i=1,2,\cdots,2k-1)$. 但这种排法不合乎要求. 因为按逆时针方向记录的相邻两个数的差值依次为: $4k,4k-1,\cdots,2k+1,2k,2k-1,\cdots,3,2,2k+1$. 其中 $2k+1$ 出现了两次, 而 1 没有出现. 为了改变差值, 应调整. 不难发现后 $2k$ 个差值都减少 1 后, 其结果合乎要求. 这只须将后 $2k$ 个减数都增加 1(被减数减少 1 时, 差中出现相同的数), 即将 $i(i=k+1,k+2,\cdots,2k)$ 都换作 $i+1$, 得到合乎条件的排法如下:

$4k,1,4k+1,2k+1,2k+2,\cdots,3k-1,k+3,3k,k+2,3k+1,k,\cdots,4k-2,3,4k-1,2$.

对于 $n=4k-1$, 将 $1,2,\cdots,2k$ 逆时针排列, 除 $2k-1$ 与 $2k$ 之外, 每两个相邻数之间插入一个数, 插入的数依次为 $4k,4k-1,\cdots,3k+1,3k-1,3k-2,\cdots,2k+1$. 其中 $4k$ 排在 $2k$ 与 1 之间, $2k+1$ 排在 $2k-2$ 与 $2k-1$ 之间. 则排法合乎条件.

故 $n=4k(k\in N)$ 和 $n=4k-1(k\in N)$ 为所求.

本例实质上是特殊图的完美标号. 所谓完美标号, 是给定一个 r 阶简单图 G, 其中 $|G|=k$. 用 $0,1,2,\cdots,k$ 这 $k+1$ 个数

中的某 r 个数对 G 的顶点进行标号，使得每条边的两个端点上的标数之差构成集合$\{1,2,3,\cdots,k\}$.能够进行完美标号的图称为完美标号图，其中 k 称为级，r 称为阶.比如，上述多边形的标号即是一个 n 级 n 阶的完美标号图.

1978 年，C. Hodee 和 H. Kuiper 曾证明，所有“星轮状”的图都是完美标号图.本例给出了“纯轮状(多边形)”图形是完美标号图的充要条件.一个“网轮状(多边形及其部分对角线)”的完美标号图如图 28 所示，而图 29～图 31 则是几个常见的“星轮状”的完美标号图.

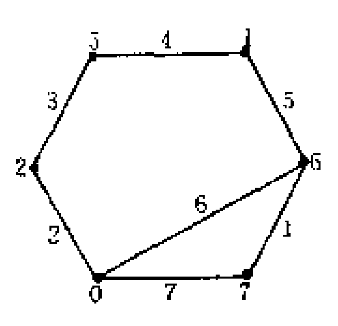


图 28

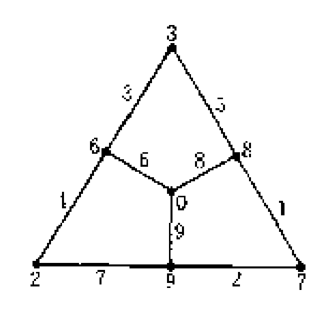


图 29

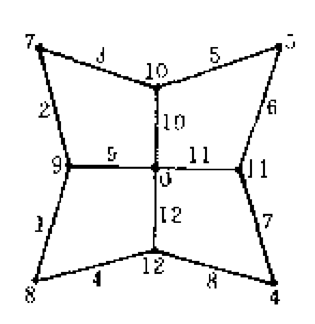
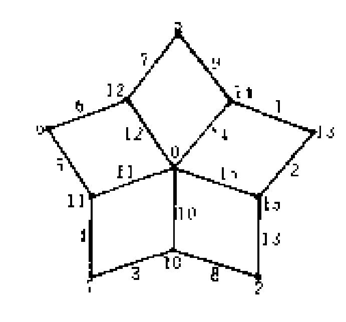


图 30


图 31

在图的完美标号中，还存在着最小完美标号问题.即对给定的自然 k，寻找一个阶最小的完美标号图.比如 $k=13$ 时，可以证明最小的完美标号图是 6 阶的(见图 32).

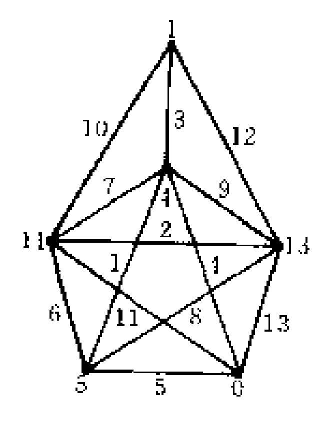


图 32

有趣的是，最小完美标号问题与最省刻度尺问题有紧密联系.一百多年前，英国数学游戏家杜德尼发现：一根长 13 厘米的尺子，只须在 1,4,5,11 厘米处刻上刻度，即

可量出(限量一次,下同)1 到 13 厘米的任何整数厘米的长度(简称整度量).而且刻度个数不能再减少.具有这样的刻度的尺子称为最省刻度尺.显然,图 32 与长为 13 的尺子的最省刻度是等价的.因为严格地说,尺子上除刻度 1,4,5,11 外,还有两个固有的刻度 0 和 13.进一步,杜德尼还指出,长 22 厘米的尺子,仅须 6 个刻度(两种方案),即可完成整度量.这两种刻度分别为:

(1) 1,2,3,8,13,18;

(2) 1,4,5,12,14,20.

日本的藤村幸三郎曾指出,长 23 厘米的尺子,也只须用 6 个刻度(1,4,10,16,18,21),即可完成整度量.

1956 年,约翰·李奇在《伦敦数学会杂志》上撰文指出,长 36 厘米的尺子,仅须 8 个刻度(1,3,6,13,20,27,31,35),即可完成整度量.

前苏联的勒·莫·拉巴沃克在所著《数学消遣》中指出,长 40 厘米的尺子,仅须 9 个刻度(1,2,3,4,10,17,24,29,35),即可完成整度量.

遗憾的是,这个问题至今没有彻底解决,目前取得的结果如下表所示:

刻度数	尺子长度	刻　　度
1	3	1
2	6	(1,4)
3	11	(1,4,9),(2,7,8)
4	17	(1,4,10,12),(1,4,10,15) (1,8,11,13),(1,8,12,14)

（续表）

刻度数	尺子长度	刻　　度
5	25	(1,4,10,18,23),(1,7,11,20,23),(1,11,16,19,23), (2,3,10,19,21),(2,7,13,21,22)
6	34	(1,4,9,15,22,32)
7	44	(1,5,12,25,27,35,41)
8	55	(1,6,10,23,26,34,41,53)
9	72	(1,4,13,28,33,47,54,64,70) (1,9,19,24,31,52,56,58,69)

对长为 n 厘米的尺子，至少需要几个刻度，才可完成整度量？另外，在尺子上刻上 k 个刻度，最多能量出多大范围的整长度？这些问题都有待人们继续研究．值得一提的是，最省尺在 X 射线，晶体学，雷达脉冲，导弹控制，通讯网络，射电天文学等领域里派上了用场（见马克杰，《优美图》，北京大学出版社，1991 年版）．

4.3　极值填数问题

所谓极值填数问题，是指在棋盘中适当填数，使之合乎某个条件，在此基础上求相关参数的极值．下面给出若干这方面的例子．

例 1　在 $m\times n$ 棋盘 C 中（$m>1,n>1$），每格填一个数，使对任何 $p\times q$ 矩形，相对顶点两格所填的数的和相等．若对适当的 r 个格填数后，余下各格所填的数被唯一确定，求 r 的最小值．（1971 年第 5 届前苏联数学竞赛题）

解：填好数表的第一行和第一列后，数表被唯一确定，此时，数表只填了 $m+n-1$ 个数．即 $r=m+n-1$ 时，存在相应

的填法.下面证明,对所有合乎条件的填法,有 $r \geqslant m+n-1$.

用反证法.即证明 $r \leqslant m+n-2$ 时,不论怎样填表,数表都不唯一确定.对 $m+n$ 用数学归纳法.

当 $m+n=4$ 时,$m=n=2$,2×2 数表中填 2 个数,数表不唯一确定,结论成立.

设结论对 $m+n=k$ 成立.考察 $m+n=k+1>4$ 时的情形.数表填入 $r \leqslant m+n-2=k-1$ 个数,我们要证明此数表不唯一确定.为了利用假设,应去掉数表的一行或一列.而且去掉的行或列应具有这样的性质:

(1) 去掉这行后,数表至少还有两行(否则不能利用归纳假设).为此,不妨设 $m \leqslant n$,则 $n>2$.于是可去掉一个列.

(2) 去掉这列后,数表中的数不多于 $k-2$ 个数,即去掉的列中至少有一个数.

(3) 加上去掉的这个列,数表仍不唯一确定.这只须此列中的数不多于一个.实际上,若有一个数 a,在子表中不被唯一确定,而被加上一列中的两个数 b,c 及与 a 同列的一个数 d 唯一确定.注意到加上的那一列中最多有一个数,则不妨设 c 是该列中是新填入的数,则 c 只能由另一列中的两个数 e,f 确定.于是,a 可由子表中的 e,f,d 唯一确定.矛盾.

现在要找到合乎上述条件(2)和(3)的一个列,即此列中恰有一个数.注意到 $m \leqslant n$,所以,棋盘中的数的个数 $r \leqslant k-1=m+n-2 \leqslant 2n-2<2n$.所以,至少有一列不多于一个数.若此列中没有数,则此列不唯一确定,结论成立.若此列中恰有一个数,则去掉此列,利用归纳假设,结论成立.

例 2 议会中有 2000 名议员,他们决定审核财政预算,共有 200 项开支.各名议员都准备一份预算草案,列出各项支出的数额,各位列出的数额的总数都不超过 S.议会审议时,均将

之确定为至少 k 名议员所同意的数目(即 k 名议员列出的数额均不低于通过的数目).试问:至少应将 k 确定为多少,才能保证通过的总额不超过 S?(第 54 届莫斯科数学竞赛题)

解:显然,每个议员所填的各项开支是一个长为 200 的数列,2000 个议员所填的数列构成一个 2000×200 的数表,此数表的各行的和都不大于 S.现在要在数表的最下面填一行数,使每列中至少有 k 个数,它们都不小于对应列中新填的数.求最小的 k,使最后所填的一行数的和不大于 S.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{200}, \\
b_1, & b_2, & b_3, & \cdots, & b_{200}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_1, & c_2, & c_3, & \cdots, & c_{200}, \\
\hline
x_1, & x_2, & x_3, & \cdots, & x_{200}.
\end{array}
$$

若数 k 合乎上述要求,则称 k 是好的.$k=2000$ 显然是好的.进一步,$k=1999$ 是好的.实际上,当 $k=1999$ 时,对任何 $j=1,2,\cdots,200$,第 j 列最多有一个数小于 x_j,我们称这样的数为坏数.于是,200 个列至多有 200 个坏数.但数表有 2000 行,于是,至少有一个行没有坏数.这表明:此行中的 200 个数都大于或等于对应列中新填的数,新填的数的和当然不超过 S.同理,$k=1998$ 是好的.如此下去,不难发现,$k=1991$ 也是好的.实际上,当 $k=1991$ 时,每列至多有 9 个坏数,200 列至多有 1800 个坏数,于是,至少有一个行中没有坏数.

下面证明:$k=1990$ 不是好的.实际上,将数表的每 10 行分为一个组,第 i 组中,每行的数都填 $\frac{S}{199},\frac{S}{199},\cdots,\frac{S}{199},0,\frac{S}{199},\cdots,\frac{S}{199}$.其中只有第 i 列的数为 0,其余各数都为 $\frac{S}{199}$.这样,数表中

的每一行都有 199 个$\frac{S}{199}$，一个 0，于是，每行的和为 S. 每列中有 10 个 0，1990 个$\frac{S}{199}$，从而对任何 j，令 $x_j=\frac{S}{199}$. 此时通过的支出总额为 $200\times\frac{S}{199}>S$，矛盾.

综上所述，k 的最小值为 1991.

例 3 彩票上依次排列着 50 个空格，每个参加者都在彩票上填入 1 至 50 的整数，主持人亦填一张作底. 如果某人所填的数列中有一个位置与彩票上对应位置上填的数相同，则可中彩. 试问：一个参加者至少要填多少张彩票，才能保证自己一定中彩？（1991 年第 25 届前苏联数学竞赛题）

解：若适当填 k 张可以中彩，则称 k 是中彩的. 将所填的 k 张彩票排成 $k\times 50$ 的数表：

$$\begin{array}{ccccc}
a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{50}, \\
b_1, & b_2, & b_3, & \cdots, & b_{50}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_1, & c_2, & c_3, & \cdots, & c_{50}, \\
\hline
x_1, & x_2, & x_3, & \cdots, & x_{50},
\end{array}$$

所谓 k 是中彩的，即不论底票上的 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{50}$如何填，数表中至少有一个列，设为第 j 列，此列中至少有一个数与 x_j 相等. 我们称第 j 列中与 x_j 相等的数为好数($j=1,2,\cdots,50$). 这样，k 是中彩的，等价于存在 $k\times 50$ 数表，使表中至少有一个好数.

显然，$k=50$ 是中彩的. 实际上，50×50 数表有 50 行，50 列，每行是 $1,2,3,\cdots,50$ 的一个排列，表中共有 50 个 1，我们可以将 50 个 1 占住 50 列，即每列一个 1. 这样，不论 $x_1,x_2,x_3,\cdots$,

x_{50}如何填，其中的1必与表中的某个1同列. 进一步，我们发现，可适当选取常数 $a \leqslant 50$，让每个数 $i(i=1,2,\cdots,a)$ 都占住数表中前 a 列的每一列(如下表).

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & a-1, & a \\ 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots, & a, & 1 \\ 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots, & 1, & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a, & 1, & 2, & 3, & \cdots, & a-2, & a-1 \end{array}$$

这样，若底票上的数 $1,2,\cdots,a$ 中至少有一个填入前 a 列，则前 a 列中必有一个好数. 要使底票上的数 $1,2,\cdots,a$ 中至少有一个填入前 a 列，只须 $1,2,\cdots,a$ 这 a 个数不能都填在后 $50-a$ 列，这等价于 $50-a<a$，即 $a \geqslant 26$. 由此可见，$k=26$ 是中彩的.

下面证明 $k=25$ 不是中彩的. 考察任一个 25×50 数表，我们证明可以适当地填一张底票 $P: x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{50}$，使表中没有一个好数. 先填 P 中的数 1. 由于表中共有 25 个 1，有 50 列，必有一个列中没有 1，在此列中填 1 即可. 按此方法再依次填 $2,3,\cdots,a-1$. 直至 a 不能按上述方法填入. 则 $a \geqslant 26$(若 $a<26$，则 P 中至多填了 $a-1 \leqslant 24$ 个数，占了 24 个 P 中的格，但表中只有 25 个 a，占了 25 个格，共占了 $24+25$ 个格，P 中至少还有一个格可填 a). 由于表中只有 25 个 a，占了 25 个列，P 中至少还有 25 个格可填 a. 但 a 不能填入，意味着这 25 个格被先填入的 $1,2,3,\cdots,a-1$ 中的 25 个数(记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{25}$)占住. 在 P 中任取一个空格 D，由于 D 所在的列只有 25 个数，于是，D 中至多有 25 个数不能填入，这样，$a,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{25}$ 中至少有一个数可填入 D 中，但 a 不能填入 D，所以，$x_1,x_2,x_3,\cdots,$

x_{25}中必有一个数 x_i 可填入 D,将 x_i 填入 D,并将 a 填入 x_i 原来所在的位置.如此下去,得到一个底票的填法.对任何 $j=1,2,\cdots,50$,数 x_j 都不与表中第 j 列的任何一个数相同.

综上所述,k 的最小值为 26.

例 4 将 1,2,…,9 这 9 个数填入 3×3 棋盘,使相邻(有公共边)两格的数的差的绝对值之和最大,求其最大值.

解:如图 1,记各格中的数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$,所有相邻两格的数的差的绝对值之和为 H.注意到旋转周围 8 个方格中的数,H 只有两种不同取值,于是,不妨先固定中间一个方格内的数 a_9,再考察其他数应怎样填,才能使 H 最大.

a_1	a_2	a_3
a_8	a_9	a_4
a_7	a_6	a_5

图 1

记周围 8 个格相邻两数之差的绝对值之和为 H_1,与 a_9 相邻的各数与 a_9 之差的绝对值之和为 H_2,则 $H=H_1+H_2$.

下面证明,当 a_9 固定时,$a_1,a_2,\cdots,a_8$ 按大小交错排列时 H_1 最大.实际上,反设有三个连续项单调,不妨设 $a_1<a_2<a_3$,那么由 $|a_2-a_1|+|a_3-a_2|=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)=a_3-a_1$ 可知,在数表中去掉 a_2,H_1 不变.将外围的 8 个数看作一个圈,去掉 a_2 后,圈中剩下 7 个数,其中的每个数要么比 a_2 大,要么比 a_2 小.注意到 7 为奇数,所以必存在两个相邻的数同比 a_2 大或同比 a_2 小,将 a_2 插入这两个数之间,得到的排法使 H_1 增大,矛盾.

于是,不妨设 $a_1>a_2,a_2<a_3,a_3>a_4,\cdots,a_7>a_8,a_8<a_1$.则

$$H_1=(a_1-a_2)+(a_3-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_7-a_8)+(a_1-a_8)=2(a_1+a_3+a_5+a_7)-2(a_2+a_4+a_6+a_8).$$

在 8 个数中,取 a_1,a_3,a_5,a_7 为较大的 4 个数,a_2,a_4,a_6,a_8 为

较小的 4 个数，则 H_1 最大.

下面讨论 a_9 的取值，求出 H 的最大值.

当 $a_9=9$ 时，$H_1\leqslant 2(8+7+6+5)-2(4+3+2+1)=32$，$H_2\leqslant(9-1)+(9-2)+(9-3)+(9-4)=26$，$H\leqslant 32+26=58$. 类似地，当 $a_9=8$ 时，$H_1\leqslant 34$，$H_2\leqslant 22$，$H\leqslant 56$；当 $a_9=7$ 时，$H_1\leqslant 36$，$H_2\leqslant 18$，$H\leqslant 54$；当 $a_9=6$ 时，$H_1\leqslant 38$，$H_2\leqslant 15$，$H\leqslant 53$；当 $a_9=5$ 时，$H_1\leqslant 40$，$H_2\leqslant 14$，$H\leqslant 54$；以下都有 $H\leqslant 58$（实际上，用 $9-i$ 代替 i 即可）.

最后，如图 2，有 $H=58$，所以 H 的最大值为 58.

5	1	6
2	9	4
8	3	7

图 2

例 5 给定正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$；$b_1,b_2,\cdots,b_n$，且 $a_1+\cdots+a_m=b_1+\cdots+b_n$. 求证：可以在 $m\times n$ 棋盘中填入不多于 $m+n-1$ 个正数（每格至多一数），使第 i 行各数之和为 a_i，第 j 列各数之和为 b_j（$1\leqslant i\leqslant m$ 且 $1\leqslant j\leqslant n$）.（第 2 届全俄数学竞赛题）

证：对 $m+n$ 用数学归纳法. 当 $m+n=2$ 时，$a_1=b_1$，填入 a_1 即可.

设结论对小于 k 的自然数成立，考察 $m+n=k$ 的情形. 不妨设 $a_1=\min\{a_i,b_j;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$. 将 a_1 放在第一行的第一列，除 a_1 外，第一行不再放数. 考察去掉第一行后的数表，它是 $(m-1)\times n$ 数表. 给定的 $(m-1)+n$ 个正数为 $a_2,a_3,\cdots,a_m,b_1-a_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$. 显然，$a_2+a_3+\cdots+a_m=(b_1-a_1)+b_2+b_3+\cdots+b_n$. 由归纳假设，命题获证.

4.4 数表的操作

所谓数表的操作，就是按一定的规则对数表中的数进行变换. 它常常研究某种目标状态能否实现，如何实现？为了实现

其目标状态，棋盘最初应如何填数？

我们来看一些具体的例子.

例1 在 3×3 棋盘中，随意在每个方格内填入1或-1，每个方格填且只填一个数.所有方格都填上数后，每个方格同时换作它的所有相邻的格（具有公共边）的数的积.求证：不论最初如何填数，都能进行有限次上述变换（我们称这样的变换为“邻积变换”），使所有方格内的数都变为1.（第18届前苏联数学竞赛题）

证：不妨设各格所填的数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_9$.为简便起见，我们用 i 代表数 a_i.如果某个格内的数已变为1，则用“·”表示.模拟操作如图1所示，从而结论成立.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

=

1	2	3
4	5	6
7	8	9

→

2,4	135	2,6
157	2468	359
4,8	579	6,8

→

3,7	2,8	1,9
4,6	·	4,6
1,9	2,8	3,7

→

2468	1379	2468
1379	·	1379
2468	1379	2468

→

·	·	·
·	·	·
·	·	·

图 1

例2 在 $1\times n$ 棋盘中，每个方格任意填入1或-1.问对怎样的 n，总可以通过“邻积变换”（各格同时换作它所有邻格，即有公共边的格内各数的积），使各数都变为1？

解法1：对任意一个数表 $a(1), a(2), \cdots, a(n)$，构造一个以 $2(n+1)$ 为周期的双向无穷数表：

$\cdots, a(1), a(2), \cdots, a(n), 1, a(n), a(n-1), \cdots, a(1), 1, a(1), a(2), \cdots, a(n), 1, a(n), a(n-1), \cdots, a(1), 1, \cdots$

将此表中某个格 $a(1)$ 叫作第一格，此外，第 i 格前面一格叫做

第 $i-1$ 格,第 i 格后面一个格叫做第 $i+1$ 个格($i=1,2,3,\cdots$).设第 k 格 $a(k)$经 i 次变换后得到的数为 $a(k,i)$,利用数学归纳法可以证明:$a(k,2^j)=a(k+2^j)a(k-2^j)$.

若对 n,任意填数都可操作到各数全为 1,由于只有有限种填数方法,必存在数 t,使操作次数大于 t 时,数表中的数全为 1.取自然数 m,使 $2^m>t$,那么,对任何填数,操作 2^m 次以后各数全变为 1.于是,对任何自然数 k,有 $a(k,2^m)=1$.所以,$a(0,k+2^m)a(0,k-2^m)=1$.

又 $a(i,j)=1$ 或 -1,所以 $a(0,k+2^m)=a(0,k-2^m)=1$ 或 -1.取 $k=k'+2^m$,有 $a(0,k'+2\times2^m)=a(0,k')$,即 $a(0,k+2^{m+1})=a(0,k)$对一切自然数 k 成立.于是,数列$\{a(0,k)\}$是以 2^{m+1}为周期的周期数列.

适当选取 $a(1),a(2),\cdots,a(n)$,可使无穷数列的最小正周期为 $2(n+1)$.而对选定的 $a(1),a(2),\cdots,a(n)$,2^{m+1}仍是数列的正周期,所以 $2(n+1)|2^{m+1}$,$n+1|2^m$.所以 $n+1=2^r$,$n=2^r-1$.

反之,当 $n=2^r-1$ 时,可构造与上类似的无穷数列,使此数列的周期为 $2n+2=2^{r+1}$,从而 $a(0,k)=a(0,k+2^{r+1})$,$a(0,k-2^r)=a(0,k-2^r+2^{r+1})=a(0,k+2^r)$,所以 $a(2^r,k)=a(0,k-2^r)a(0,k+2^r)=a(0,k+2^r)^2=1$.所以,经过 2^r 次操作后必全变为 1.

解法 2:若 $1\times n$ 棋盘任意填数 1 和 -1,都可操作到各格的数都变为 1,则称 n 是好的.首先,我们证明如下的引理:

引理 1　n 是好的,等价于 $2n+1$ 是好的.

一方面,设 n 是好的,考虑 $1\times(2n+1)$棋盘($a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$),它共有 n 个偶格(排在偶数列上的格):$a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$ 和 $n+1$ 个奇格(排在奇数列上的格):$a_1,a_3,\cdots,a_{2n+1}$.易知,

数表 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1})$每变换两次,则棋盘:$B=(a_2,a_4,\cdots,a_{2n})$进行了类似的操作一次.由于 B 可有限次操作全变为1,从而 A 可通过有限的偶数次操作,使所有偶格全变为1.(*)

在(*)的基础上再操作一次,A 的所有奇格都变为1.(注意此时 A 的偶格不一定都是1.)记此时的数表为 $A'=(1,a_2,1,a_4,1,\cdots,1,a_{2n},1)$.$A'$操作一次可使偶格全变为1,操作2次,可使奇格全变为1,如此下去,操作奇数次,可使 A'的偶格全变为1,操作偶数次,可使 A'的奇格全变为1.但 A'也是长为 $2n+1$ 的数表,由(*),可操作偶数次使 A'的偶格全变为1.但 A'操作偶数次,其所有奇格都变为1.所以,A'可操作偶数次使各个数都变为1,即 $2n+1$ 是好的.

另一方面,若 $2n+1$ 是好的,考察任意一个 $1\times n$ 的数表 B,将 B 的格依次作为 $1\times(2n+1)$的数表 A 的各个偶格,得到数表 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1})$.注意到数表 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1})$每操作两次,则数表 $B=(a_2,a_4,\cdots,a_{2n})$进行了类似的操作一次.而 A 可以经过有限次(设为 t 次)操作后可使各个格的数都变为1,那么,$2t$ 次操作后,A 的各个格的数也都变为1,这样,$2t$ 次操作后 B 的各个格的数都变为1,即 n 是好的.

引理2 若 n 为好的,则 n 为奇数.

构造一个 $1\times n$ 的数表 B,使 B 的各个格中的数不全为1.由于 n 是好的,所以,可以经过有限次操作(设为 k 次),使各个格的数都变为1.设 k 是这样的操作次数中最小的,那么,第 $k-1$ 次操作后各个格的数必定是 $+1,-1$ 交错出现,且首尾两端都为 -1.从而共有奇数个格,即 n 为奇数.

最后,我们证明:一切好数为 $n=2^r-1$.

一方面,设 $n=2^r-1$,我们证明 n 是好的.对 r 用数学归纳法.

当 $r=1,2$ 时，n 显然是好的.假定结论对 r 成立，考察 $r+1$ 的情形.因为 2^r-1 是好的，由引理 1，知 $2(2^r-1)+1=2^{r+1}-1$ 是好的.由归纳原理，对一切自然数 r，$n=2^r-1$ 是好的.

另一方面，设 n 是好的，我们证明 $n+1$ 为 2 的方幂.实际上，由引理 2 知，n 为奇数.再由引理 1，奇数 n 是好的等价于 $f(n)=\frac{n-1}{2}$ 是好的.若 $n+1$ 不是 2 的方幂，设 $n+1=2^r(2t+1)$，即 $n=2^r(2t+1)-1$，则由引理 1，有 $f(n)=\frac{n-1}{2}=2^{r-1}(2t+1)-1$ 是好的.反复迭代 r 次，有 $f^{(r)}(n)=(2t+1)-1=2t$ 是好的，与引理 2 矛盾.

注：本题可以推广到 $m\times n$ 数表的情形.所有的合乎条件的数表满足：$m=2^r-1$，$n=2^t-1$，或 $m=n=2$.但其结论的证明较复杂，请读者自己完成.

例 3 将 $1,2,\cdots,n$ 按顺时针方向排在一个圆上，先划掉 2，以后按顺时针方向每隔一个数划掉一个数，直到最后剩下一个数为止.记最后那个数为 $f(n)$，求 $f(n)$.

解：将 $f(1),f(2),\cdots$ 的值依次列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	$\cdots$

从上表可以看出，$f(n)$ 的取值的规律如下：

当 $n=2^k$ 时，$f(n)=f(2^k)=1$；当 $n=2^k+t$ 时（$t=1,2,\cdots,2^k-1$），$f(n)=2t+1$.

上述结果可以统一表示为：

当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 时，$f(n)=2(n-2^k)+1$，其中 $k=[\log_2 n]$.

为证明上述结论，我们先证明如下的引理：

引理 1 $f(2n)=2f(n)-1$，即 n 为偶数时，

$$f(n)=2f\left(\frac{n}{2}\right)-1.$$

实际上，将 $1,2,\cdots,2n$ 这 $2n$ 个数按顺时针方向排在一个圆周上，第一个圈划去一些数下来，只剩下 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 这 n 个数．将这 n 个数重新编号为 $1,2,\cdots,n$，按原来的规则划去一些数，直至剩下最后一个数为止，记剩下的这个数的新编号为 $f(n)$．于是这个数的原来的编号为 $2f(n)-1$（代回原变量）．所以，$f(2n)=2f(n)-1$．

引理 2　$f(2n+1)=2f(n)+1$．即 n 为奇数时，

$$f(n)=2f\left(\frac{n-1}{2}\right)+1.$$

证明同上，留给读者完成．

返回原题．对 n 用数学归纳法．当 $n=1,2,\cdots,16$ 时，由上表可知，结论成立．设结论对小于 n 的自然数成立，考察自然数 n．令 $n=2^k+t(t<2^k)$．

（1）　若 t 为偶数，由引理 1 及归纳假设，有

$$f(n)=f(2^k+t)=2f\left(\frac{2^k+t}{2}\right)-1=2f\left(2^{k-1}+\frac{t}{2}\right)-1$$

$$=2\left[2\left(\frac{t}{2}\right)+1\right]-1=2t+1;$$

（2）　若 t 为奇数，由引理 2 及归纳假设，有

$$f(n)=2f\left(\frac{2^k+t-1}{2}\right)+1=2f\left(2^{k-1}+\frac{t-1}{2}\right)+1$$

$$=2\left[2\left(\frac{t-1}{2}\right)+1\right]+1=2t+1;$$

故原结论成立．

例 4　在 5×5 的棋盘的一个格中填入一个数 -1，其余的格填数 1．每次操作是任取一个 $k\times k$ 的正方形（$2\leqslant k\leqslant5$），将其中的所有数都变号．问：-1 填入哪一格，才能通过适当的有

限次操作,使棋盘中所有数都变为1?(第25届前全苏数学竞赛题)

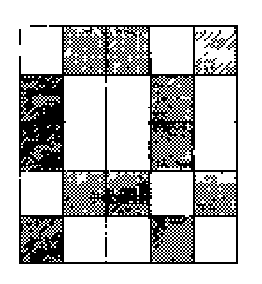


图 2

解: 解题的关键是构造一个子集,它由表中若干个格构成(图2中的阴影部分).

将上述子集中的每个格都染红色,则对任何一个 $k\times k(2\leqslant k\leqslant 5)$ 正方形,必含有偶数个红色格.如果最开始的 -1 填入红格中,那么,每次改变偶数个红格的符号,从而红格内各数的积不变,始终为 -1,从而红格中至少有一个 -1,不可能全部变为1.于是,所有红格都不能填 -1.将上述子集旋转 $90^\circ,180^\circ,270^\circ$,得到其余的红格集. -1 也不能放入这些红格中.这些红格集的并包含了除中心以外的所有方格,故 -1 最多能放在中心这一个方格中.

当中心方格放 -1 时,先取左上的 3×3 正方形进行操作,再取右下的 3×3 正方形进行操作,又取左下的 2×2 正方形进行操作,最后取右上的 2×2 正方形进行操作,即可使所有数都变为1(图3).

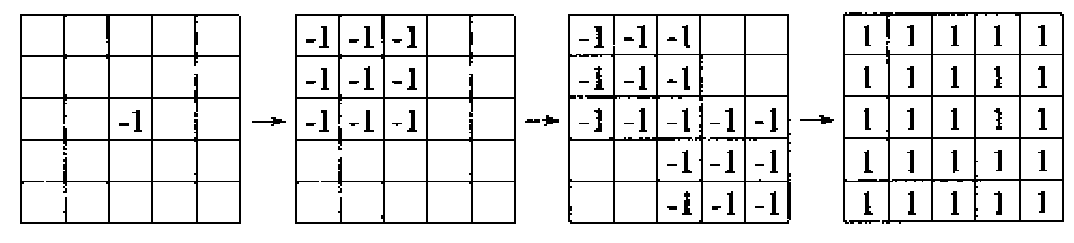


图 3

例5 在 8×8 正方形棋盘的每个格中任意填一个自然数,然后进行如下的操作:任取一个 3×3 正方形或 4×4 正方形,将其中的每一个数加1.问:能否对任何填数,都能适当有限次操作,使所有数都变成10的倍数?

解:不能.我们用三种方法证明如下.

证法1:我们可构造如下的反例.按图4,将棋盘中24个格

染红色，记所有红色格的集合为 A.则操作中 A 中各数的和的奇偶性不变.实际上，3×3 正方形或 4×4 正方形中都含有偶数个红格，每次操作都使 A 中偶数个数增加 1.对最后状态，A 中各数和为偶数，要使操作不能达到，只须在最初的填数使 A 中各数和为奇数.这显然是可以办到的.比如：在 23 个红色格中填 1，另一个红色格中填 2 即可.

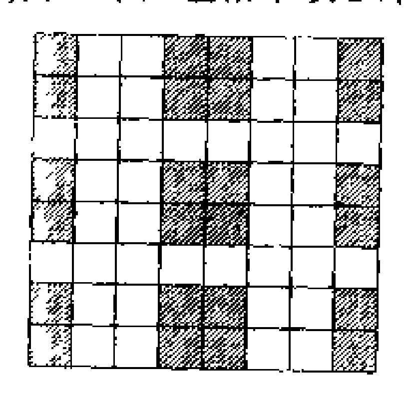


图 4

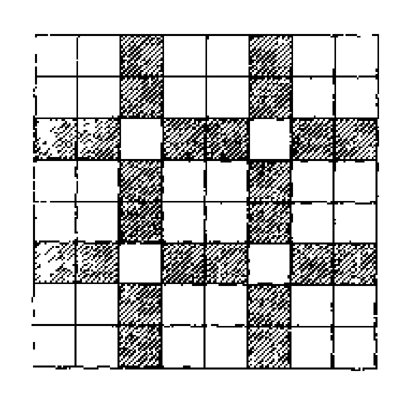


图 5

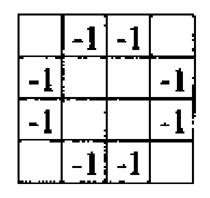
证法 2：按图 5，将棋盘中 24 个格染红色，记红色格中各数的和为 S，则 S 的奇偶性不变.实际上，任何 2×2 正方形，3×3 正方形和 4×4 正方形中都含有偶数个红格(此解法对增加 2×2 的正方形操作仍然适应).

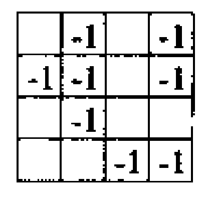
证法 3：仿例 4 的方法将有关格染红色，将红色格的集合记为 A.则对任何一个 $k\times k(2\leqslant k\leqslant8)$ 正方形，必含有偶数个红色格.

注：证法 3 不适用于 7×7 棋盘，但证法 2 仍然适用.

例 6 在 9×9 正方形棋盘的每个格中任意填一个数 $a_i(a_i^2=1)$，然后进行如下的操作：每个格同时换作它的邻格(具有公共边的格)内各数(不包括本身)的积.问：能否对任何填数，都能适当进行有限次操作，使表中的数都变为 1？（1992 年 CMO 试题）

解法 1:解题的关键是发现如图 6 所示的三个 8×8 正方形在操作下是不变的(只要发现其中一个即可,其中第一个表实质上是例 4 中的染色方法).





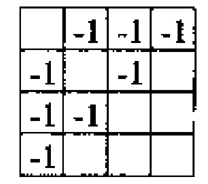


图 6

在 9×9 数表中取定一个上述的 4×4 数表 A,将它放在 4 个角上(图 7),在 9×9 表中的其他各个未填数的格都填入 1,则得到一个 9×9 的数表,此表在题设的操作下不变.

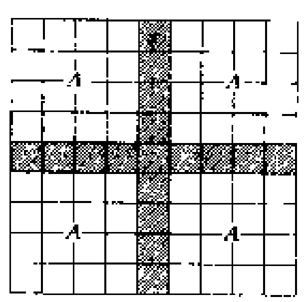


图 7

实际上,对 A 中任何一个格 x,它在操作下不变;对 A 以外的一个格 y,要么它恰有两个邻格为 -1,要么它没有邻格为 -1,从而 y 在操作下也不变.

解法 2:将 9×9 数表中的第一行交错地填 $-1,1,-1,1,\cdots,-1,1,-1$,其余各格都填数 1.此 9×9 数表在操作下具有如下性质:

(1) 偶数列不变;

(2) 若某行有 -1,则此行中的数与第一行完全相同.我们称这样的行为奇异行.

我们考察操作中哪些行变为奇异行.用(i)表示第 i 行为奇异行,则

$(1)\to(2)\to(1,3)\to(4)\to(3,5)\to(2,6)\to(1,3,5,7)\to(8)\to(7,9)\to(6)\to(5,7)\to(4,8)\to(3,5,7,9)\to(2)$.

由于操作中的奇异行周期出现,所以,操作目标不能达到.

例 7 如图 8,8×8 数表各个格都已填数 1 或 -1,每次操作允许将某行或某列的数全变号.求所有操作得到的一些数表中各个数之和的绝对值的最小值.(1988 年前苏联训练题)

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

图 8

解:设某次操作将 m 个 1 改变为 -1,$8-m$ 个 -1 改变为 1.则数表中 1 的个数减少 m 个,增加 $8-m$ 个.一共增加 $(8-m)-m=8-2m$ 个.这样,共增加偶数个 1.于是,数表中 1 的个数的奇偶性不变.注意到最初表中有 37 个 1,所以,数表中 1 的个数永远为奇数.

设数表中的某个时刻有 x 个 1,$64-x$ 个 -1,此时,数表中各数的和的绝对值 S 为:$|x-(64-x)|=|2x-64|$.由上知,x 为奇数,所以 $2x\neq64$,所以 $S=|2x-64|>0$,但 $|2x-64|$ 为偶数,所以 $S=|2x-64|\geqslant2$.

最后,$S=2$ 是可能的.由于最初有 37 个 1,要使 $S=2$,则数表中要变为含有 33 个 1 及 31 个 -1.于是,1 的个数要减少 4 个.这样,只要某行或某列恰有 6 个 1,对此行或此列操作一次,使之变为两个 1 即可.注意到第 3 列有 5 个 1,只须增加一个 1,这只须将第 3 列的某个 -1 变为 1.比如,将第 3 列中最后一行的那个 -1 变为 1,只须对最后一行操作一次即可.于是,先对最后一行操作,再对第 3 列操作,得到的数表有 $S=2$.

例 8 给定自然数 m,n,k,在 $m\times n$ 棋盘的各个方格内填上自然数,每次操作可以将相邻两个方格内的两个数同时加上一个整数 k,但应使这两个格中的数保持是非负整数.试问:当且仅当数表中填入哪些数时,可适当有限次操作,使表中各个数都变为 0?(1989 年第 30 届 IMO 备选题)

解：将数表的各个格 2－染色，使任何两个相邻的格异色．记数表中各个黑色格内所填的数的和为 S_1，各个白色格内所填的数的和为 S_2．令 $S=S_1-S_2$．

显然，每次操作 S 不变，是因 S_1,S_2 同时增加 k．由于目标状态中的各个数为 0，所以目标状态对应的 S 为 0．于是，初始状态中的 S 亦为 0（此即必要条件）．

下面证明此条件也是充分的．

我们只须具体给出一个操作方法，逐步减少数表中非 0 的数的个数．

先看第一行的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$．若 $a_1\geqslant a_2$，则将 a_2,a_3 同时加上 a_1-a_2，得到：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\to(a_2,a_2,a_3+a_1-a_2,\cdots)\to(0,0,a'_3,a_4,\cdots).$$

若 $a_1<a_2$，则 a_1,a_3 同时加上 a_2-a_1，得到：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\to(a_2,a_2,a_3+a_2-a_1,\cdots)\to(0,0,a'_3,a_4,\cdots).$$

由此可知，将 $m\times n$ 数表中 mn 个数排成一列：$a_1,a_2,\cdots,a_{mn}$，使此排列中相邻两个数在数表中是相邻（具有公共边）的．那么，任何两个相邻数 a_i,a_{i+1}，总可以借助 a_{i+2} 施行操作，使 a_i,a_{i+1} 变为 0．这样，数表中的数按图 9 所示的方式操作，一直可以得到 $a_1=a_2=\cdots=a_{mn-1}=0$，最后剩下一个数 a_{mn}．由于 $S=S_1-S_2=0$，从而最后一个数 a_{mn} 也必定为 0．

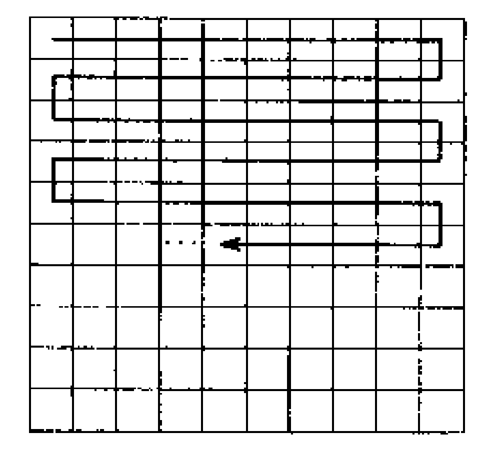


图 9

例 9　在 $m\times n(m,n>2)$ 棋盘中的每个方格填数 1 或 -1，每次操作允许改变两个恰有一个公共方格的 2×2 正方形内所

有数的符号.问:对怎样的 m,n,不论原来的数如何填,总可以通过有限次操作,使表中的数都变为原来的数的相反数?(1991年前苏联训练题)

解:3×3 表适当操作两次,可以使其4个角上的数都变号,而其余的数不变号(见图10):

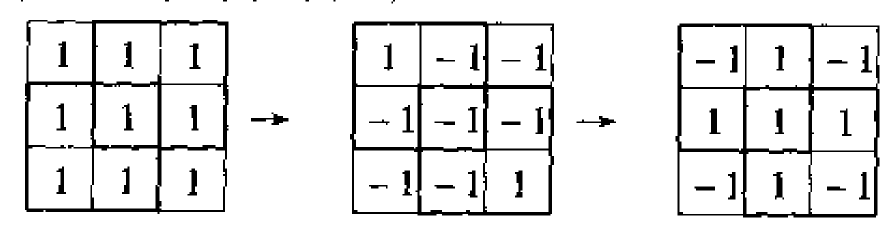


图 10

我们把这样的两次操作看作是一个大操作 A.则操作 A 恰改变 3×3 表的4角上的数的符号.对某一个 4×4 表,将此表的每一个 3×3 子表都施行操作 A,则4次操作 A 可以改变此 4×4 表内各个数的符号(其中每个格恰充当一次 3×3 表的角上格).将这样的4个操作合并看成一个大的操作 B.

于是,当 $4|m$ 且 $4|n$ 时,将 $m\times n$ 表划分为若干个 4×4 表,每个 4×4 表都施行一次操作 B,则所有数都改变成相反的符号.

下面证明,当 m,n 中有一个不是4的倍数时,操作无法实现.

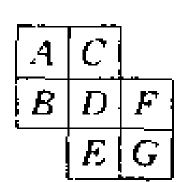
不妨设 m 不是4的倍数,考察数表中每个方格在操作中改变符号的次数(我们称为该格的秩).

(1) 若 m 为奇数,则每次操作第一列改变0个或2个格的符号,即第一列各个格的秩的和模2不变.于是,若干次操作后,第一列各个格的秩和为偶数.但共有 m(奇数)个格,必有一个格的秩为偶数.此格中的数与原来的数同号.

(2) 若 m 为偶数,令 $m=4k+2$.设第一列的格从上至下

依次为：$a_1,a_2,\cdots,a_{4k+2}$.

为了叙述问题方便，对两个恰有一个公共格的 2×2 的数表 $ABCD$ 和 $DEFG$ 进行操作(图 11)，我们认为是对 A,B 两个格进行的. 若操作后所有数变号，则每个格在操作中的秩为奇数. 现在证明：对第一列格进行的操作共有奇数次.(*)



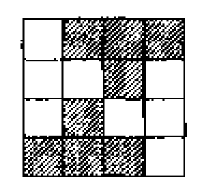


图 11

实际上，将对 a_i,a_{i+1}两格进行的操作记为 b_i，由于 a_1 变号奇数次，从而操作 b_1 有奇数个. 又由于 a_2 变号奇数次，而 a_2 在奇数个操作 b_1 中已变号奇数次，于是操作 b_2 有偶数个. 如此下去，有奇数个操作 b_{2i-1}，有偶数个操作 b_{2i}. 这样，对第一列格进行的操作的个数为：

$$\sum_{j=1}^{4k+1}t(b_j)\equiv\sum_{j=1}^{2k+1}t(b_{2j-1})\equiv1(\bmod 2).$$

其中 $t(b_j)$表示操作 b_j 出现的次数. 结论(*)成立.

考察上述奇数次操作，每次改变第 2 列的 3 个格. 从而奇数次操作对第二列格的“秩和”的贡献为奇数. 但每个格的“秩和”为奇数，且第二列共有 $4k+2$(偶数)个格，所以第二列格的“秩和”为偶数，矛盾.

综上所述，所求的一切 m,n 为 4 的倍数.

例 10 在 $n\times n$ 棋盘($n\geqslant3$)中，每个方格染成了黑白两种颜色之一，相邻的格不同色. 每次操作允许改变任何一个 $4-T$ 形内所有方格的颜色. 问：能否经过有限次操作，使所有方格都变成相反的颜色?（1990 年前苏联训练题）

解：$n\times n$ 棋盘中，每次操作改变 4 个格的颜色. 于是，黑、白格数的变化只有以下几种情况：3 黑 1 白变为 3 白 1 黑，3 白 1

黑变为3黑1白.不论那种情形,黑色格数与白色格数的差关于模4不变.不妨设 $n\times n$ 棋盘左上角一格为黑色.

(1) 当 n 为奇数时,$S_{黑}-S_{白}\equiv1\pmod 4$.但若棋盘所有格全变为黑色,则有 $S_{黑}-S_{白}\equiv3\pmod 4$,矛盾.从而操作不能实现.

(2) 当 $n=4k$ 时,考察 4×4 棋盘,它可以划分为4个4-T形(图12).从而 4×4 棋盘可按要求操作,使所有方格都变成相反的颜色.这样,将 $4k\times4k$ 棋盘分割为 k^2 个 4×4 棋盘,可知 $n\times n$ 棋盘可按要求操作.

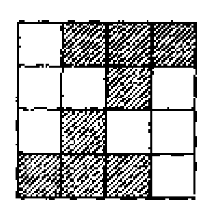


图 12

(3) 当 $n=4k+2$ 时,先分割出左上角的 $4k\times4k$ 矩形,余下的部分可分为若干个 1×2 骨牌(图13).对每个 1×2 骨牌,将其扩充为 4×4 矩形,按图14所示的方式操作若干次,可使 4×4 矩形中仅改变其中的一个 1×2 骨牌的方格颜色.我们把这几次操作看作一个大操作 B.对每一个 1×2 骨牌进行一次大操作 B 即可达到目的.

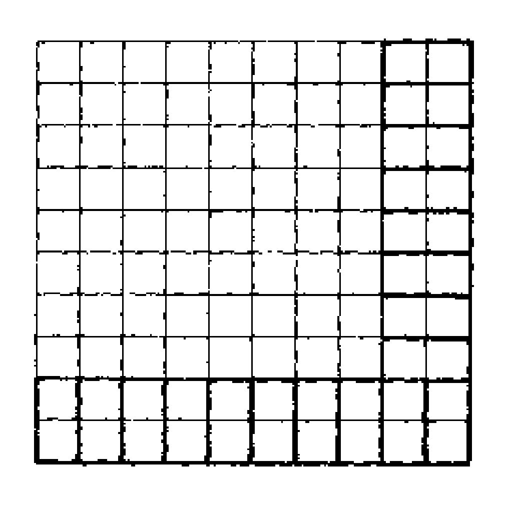


图 13

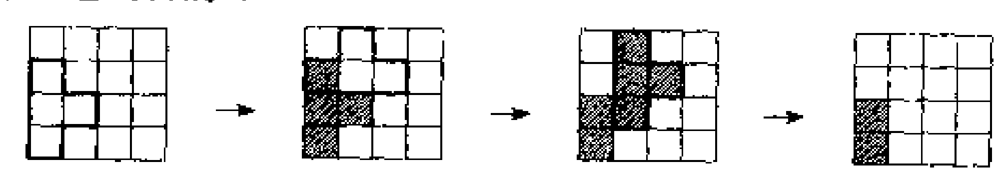


图 14

综上所述,当 n 为奇数时,操作目标不能实现;当 n 为偶数时,操作目标能够实现.

例 11 两人轮流在 3×3 的棋盘内填事先给定的 9 个数. 先走者计算棋盘的第一、三两行数之和,后走者计算第一、三两列数之和.填完 9 个数之后,谁的和大谁获胜.求证:先走者有不败的策略.(第 5 届全俄数学竞赛题)

证:设填入的 9 个数为:$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_9$. 由于四个角上填的数是两人的"和"中公共的数,中心是两个"和"中都没有数,因此,只须比较图 15 中 A,B,C,D 四格内各数对两个"和"的贡献的大小.

甲显然有两招:将最大的数填入只属于自己的格,将最小的数填入只属于对方的格. 当甲想将最大的数填入只属于自己的格 A 时,对方可将最小数填入只属于甲的格 C.这样甲的"和"中有 a_9+a_1.若甲又将次小的数 a_2 填入只属于对方的格 B,则乙可将次大的数 a_8 填入只属于自己的格 D 中.所以须讨论 a_1+a_9 与 a_2+a_8 的大小.

	A	
D		B
	C	

图 15

(1) 当 $a_1+a_9\geqslant a_2+a_8$ 时,甲可将 a_9 填入格 A,且能使 a_1 或 a_2 中的一个填入 B 或 D 中,这是因为乙填好一个数以后,B,D 中至少有一个格未填数,且 a_1,a_2 中至少有一个未被填入.

若乙第一次填格 C.分两种情况:一是乙将 a_1 填入 C,则甲可将 a_2 填入 B.于是,$A+C\geqslant a_9+a_1\geqslant a_2+a_8\geqslant B+D$;二是乙将 $a_i(i\neq1)$填入 C,则甲可将 a_1 填入 B.于是,$A+C\geqslant a_9+a_2\geqslant a_1+a_8\geqslant B+D$.

若乙第一次不填格 C,而填 B 或 D,则甲可将 a_2 填入 B,D 中还未填的一格,于是,$A+C\geqslant a_9+a_1\geqslant a_2+a_8\geqslant B+D$.

(2) 当 $a_9+a_1<a_2+a_8$ 时,甲将 a_1 填入 B.下分两种情况:一是乙第一次填格 D,则 $D\leqslant a_9$.甲再将 a_9,a_8 中未填入的一个填入 A,则有 $A+C\geqslant a_2+a_8\geqslant a_1+a_9\geqslant B+D$;二

是乙第一次不填 D，而填 A 或 C，则 A 或 $C\geqslant a_2$. 此时，甲再将 a_9,a_8 中未填人的一个数填入 A,C 中未填的格，有 $A+C\geqslant a_2+a_8\geqslant a_1+a_9\geqslant B+D$.

综上所述，先走者有不败的策略.

习 题 四

1. 集合 X 被划分成 n 个两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，又划分成两两不交的子集 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 对任何两个子集 A_i,B_j，若 $A_i\cap B_j=\varnothing$，则 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$. 求 $|X|$ 的最小值.(1978 年罗马尼亚数学竞赛题)

2. 在 $n\times n$(n 为奇数)棋盘中的方格内填数，使每一行，每一列中的数都是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列. 而且所填的数关于棋盘的一条对角线对称. 求证：在这条对角线上的数也是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

3. 在 8×8 棋盘中填入 64 个非负整数，它们的和为 1956，两条主对角线上各个数之和为 112，且关于每条主对角线对称的两个方格上的数相等. 求证：棋盘中的每一个"行和"都是 518.

4. 在 4×4 棋盘中填入 16 个不全为 0 的数，使每一行，每一列，每一条对角线上的数的和都是 0.

5. 在 15×15 棋盘中的每个方格内填数：$1,2,3,\cdots,56$，每个方格内恰填一个数. 求证：存在 4 个方格，它们构成一个平行四边形的顶点，且平行四边形的两条对角线上所填的两个数的和相等.

6. 设 n 为奇数，将 $1,2,\cdots,n^2$ 填入 $n\times n$ 棋盘，使每一行每一列及两条对角线上的数的和都相等.

7. 如图，在 4×4 棋盘中的每一个方格填入数 1 或 -1，在每一行的右边填人该行的数的积，每列的下边填人该列的数的积，使得到的 8 个积的和为 0. 问对 25×25 棋盘，这项工作是否可以进行？对哪些 $n\times n$ 棋盘，这项工作可以进行？

1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1
-1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	

(第 7 题图)

8. 在 23×23 棋盘中的每一个方格填人 $1,2,\cdots,9$ 中的一个数，然后对数表中所有形如"十字形"的 5 个小方格内的数求和. 求证：其中必有

11 个"和"相等.

9. 在 10×14 棋盘中的每一个方格填入 0 或 1,使每行每列都有奇数个 1.再将棋盘的格染上黑白二色,使相邻的格不同色.求证:填在黑格中的 1 有偶数个.

10. 在 100×100 棋盘中的每一个方格填入一个整数,使任何两个相邻(有公共边)的方格中的数的差的绝对值不大于 20.求证:至少有 3 个方格中填的数相同.

11. 在 15×15 棋盘中,每个小方格均填上一个非零数,使每个数都等于其所有邻格(具有公共边)中所填的数的积.求证:每个方格内的数都为正数.(第 54 届莫斯科数学竞赛题)

12. 在 1995×1995 数表中,每个数 $a_{ij}=1$ 或 -1,且每列恰有一个 -1.记 P_{ij} 为第i行第j列所有数的乘积.试证:$\sum\limits_{i,j}P_{ij}\neq 1$.

13. 在 $m\times n$ 数表中,所有数不全为零.每一个数都等于它所在的行各数之和与所在的列各数之和的积.求此表中所有数之和.(第 20 届莫斯科数学竞赛题)

14. 能否将 $1,2,\cdots,64$ 分别填入 8×8 棋盘的 64 个方格内,使任何 $4-T$ 型的 4 个方格内的数之和为 5 的倍数?

15. 在 8×8 棋盘 C 中,两个具有公共边的格称为是相邻的.将 $1,2,3,\cdots,64$ 分别填入各格中,每格填一个数.求证:存在两个相邻的格,其所填的数的差不小于 5.(第 26 届莫斯科数学竞赛题)

16. 在 8×8 棋盘 C 中,两个具有公共边的格称为是相邻的.将 $1,2,3,\cdots,64$ 分别填入各格中,每格填一个数.对任何填法,求所有相邻两格所填的数的差的绝对值最大者的最小值.

17. 求证:存在无穷多个自然数 n,使 $1,2,3,\cdots,3n$ 可以排成 $3\times n$ 数表:

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \\ c_1, & c_2, & \cdots, & c_n \end{matrix}$$

满足:

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数;

(2) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数.(1997 年 CMO 试题)

18. 能否由 1,2,…,121 排成一个 11×11 数表,使彼此相差 1 的数在相邻(有公共边)的方格中,而所有的完全平方数在同一列?

19. 求证:对任何正偶数 n,都可以构造以 $-1,0,1$ 排成的 $n\times n$ 数表,使它的 n 个"行和"与 n 个"列和"(共 $2n$ 个和)互不相同.

20. 给定整数 $n>1$,试确定对怎样的整数 $k(0<k<n)$,可以构造一个 $n\times n$ 的实数表,使其中所有数的和为负数,而任意 $k\times k$ 子表中各数的和为非负数.

21. 在 $n\times n$ 棋盘内填入不全为零的数,使每一个格内的数都等于与它相邻(有公共边)的所有格内填数的和.求出所有合乎条件的自然数 n.

22. 是否存在大于 1 的自然数 n,使存在一个 $n\times n$ 数表,其 n 个"行积"是相等的?

23. 在 6×7 棋盘的第四列方格中填入数字 1,2,3,4,5,6,7.试问:能否在棋盘的其他方格都填入一个数字,使得由各行数字所形成的 6 个七位数成等差数列,且各列数字所形成的 7 个六位数也成等差数列?

24. 由 $1,2,\cdots,n^2$ 构成的 $n\times n$ 数表中,每行的数从左至右成等差数列,每列的数从上至下成等差数列.问:这样的数表有多少个?

25. 能否构造一个 9×9 数表,其中的数都是互异的小于 1000 的自然数,使每一个"行积"及每一个"列积"都相等?

26. 求证:对任何自然数 $n(n>2)$,都存在一个由 $1,2,\cdots,n^2$ 构成的 $n\times n$"等和"数表.

27. 在一个 13×17 数表中,每行每列的数成等差数列,四个角上的数的和为 36,求此数表中所有数的和的最大值.

28. n 名选手参加比赛,历时 k 天,其中任何一天 n 名选手的得分都恰好是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列.如果在第 k 天末,每个选手的总分都是 26,求(n,k)的所有可能取值.

29. 用 1 和 2 组成 5 个不同的 n 位数.在每两个 n 位数中,都恰有 m 个数位上的数字相同.但对任何一个数位,5 个 n 位数在此位上的数字不完全相同.求证:$2/5\leqslant n/m\leqslant 3/5$.

30. 在 $m\times n$ 数表中,每一行中的 n 个数从左至右是非严格递增的,且每一列的 m 个数从上至下是严格递增的.我们用 $L(a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示数表中有 a_1 个 1,a_2 个 2,$\cdots$,a_k 个 k 的所有不同数表的个数.求证:函数 $L(a_1,a_2,\cdots,a_k)$的值与自变量 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的排列顺序无关.

31. 设 $n\geqslant 10$,求最小自然数 n,在圆上适当放置 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数,使任何相邻两数之差的绝对值为 3,4 或 5.

32. 在圆周上填入 $n(n>2)$个互异的数,使每个数都是它左右与它相邻的两个数之积,求 n 的所有可能取值.

33. 在立方体的每一个顶点上标数 1 或 -1,再在每一个面上标上该面上四个顶点所标的数的积.这样,正方体上共标有 14 个数,求这 14 个数的所有可能的和.

34. 在 $n\times n\times n$ 立方体的每个方格中放一个整数,使 n^3 个数互异,且平行于立方体的任一条棱的 n 个格中的数的和为 0.(第 20 届前全苏数学竞赛题)

35. 在正 n 边形的每个顶点上放一个数,其中有一个 1,其余的为 0.每次操作允许将子正 k 边形的所有顶点上的数都加 1.试问:能否经过有限次操作,使顶点上的所有数相等?

36. 在 8×8 的方格棋盘内的一个格中填入一个数 -1,其余的格填数 1.每次操作是任取一个 $k\times k$ 的正方形($2\leqslant k\leqslant 5$),将其中的所有数都变号.问:-1 填入哪一格才能通过适当的有限次操作,使棋盘中所有数都变为 1?

37. 给定一个 $n\times n$ 棋盘,每次操作是对棋盘的同一行或同一列的格中放 n 只围棋子.每次操作中,每个格只能放一只棋子,但棋子可以放在已有棋子的格中.将 n 只棋子放下后,若某个格中出现异色的棋子,则在此格中拿去同样多的黑色子与白色子,使此格中只剩下一色的

棋子或此格变为空格.至此,称为一次操作.若最初的棋盘中没有棋子,求证:不可能通过有限次操作,使某个格的棋子数恰比其他各个格中的棋子数都多1.

38. 在8×8棋盘中,各个格已染上黑色和白色,且任何相邻两个格异色.分别进行如下两种操作.问:能否通过有限次操作,得到恰有一个白色格的棋盘?

(1) 允许改变同一行或同一列所有格的颜色;

(2) 允许改变任意2×2正方形内所有格的颜色.

39. 在8×8棋盘的右上角方格放一个黑色棋子,其余方格都是空格.每次操作允许在棋盘中的任何一个空格内放一个白色棋子,并将此子邻格(具有公共边)内所有已放的棋子改变成相反的颜色.问:能否适当操作有限次,使棋盘的每个格都放有白色棋子?(1991年前列宁格勒数学竞赛题)

40. 在3×3棋盘中,随意在每个方格内填入1或-1,每个方格填且只填一个数.所有方格都填上数后,每个方格同时换作它的所有相邻的格(具有公共边)的数的积.若不论最初如何填数,都能进行r次"邻积变换",使所有方格内的数都变为1,求r的最小值.

41. 在5×8棋盘中,每个方格都填一个自然数,然后施行如下操作:每次操作同时将某一行的所有数都乘以2或同时将某一列中所有数都减少1.求证:可适当操作若干次,使棋盘中的所有数都变为0.

42. 在5×5盘中一个方格放入"$-$"号,其他方格都放入"$+$"号.每次操作可选取一个至少含有4个方格的正方形,将此正方形内的所有符号都改变成相反的符号.问:应将"$-$"号填入哪个方格,才能保证可以有限次操作,使所有方格的符号都变为"$+$"号?

43. 甲乙两人在8×8棋盘上作游戏.甲每次可以将相邻(有公共边)的两个方格染黑,而乙可以将任何一个方格染白色(同一方格可以多次染色).一开始,所有方格都是白色.对下述两种规定:

(1) 若乙能在每一次染色中,使每一个5×5矩形中都至少有一个角上的方格为白色,则乙胜,否则甲胜;

(2) 若乙能在每一次染色中,使每一个5×5矩形中都至少有两

个角上的方格为白色，则乙胜，否则甲胜．

问：谁有必胜策略？

第五章　棋盘的格点与格径

5.1　格点多边形

在 $m \times n$ 棋盘中，每个方格的顶点称为格点，每个方格的边称为格径．我们约定每个方格是单位正方形，即边长为 1 的正方形．以格点为顶点的多边形称为格点多边形．

对于格点多边形，一个众所周知的结论是如下定理：

定理 1（Pick 定理）　设 S 是格点多边形的面积，P 是格点多边形边界上的格点（含顶点）的个数，I 是格点多边形内部格点的个数，则

$$S = \frac{P}{2} + I - 1.$$

此定理的证明在很多书刊中都有介绍，这里从略．借助这一定理，我们可以研究格点多边形的面积的最小值．对此，我们有如下定理：

定理 2　格点 n 边形的面积的最小值为 $\frac{n}{2} - 1$．

证：设格点 n 边形的面积为 S_n，则由 Pick 定理，有

$$S_n = \frac{P}{2} + I - 1 \geqslant \frac{P}{2} - 1 \geqslant \frac{n}{2} - 1.$$

另一方面，由图 1（n 为奇数）和图 2（n 为偶数）可知，对任何自然数 $n \geqslant 3$，存在格点多边形，使其面积为 $\frac{n}{2} - 1$．

定理 2 获证.

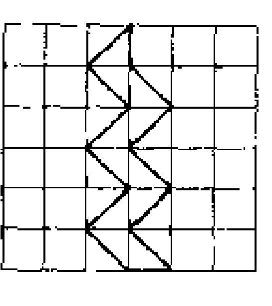




图 1

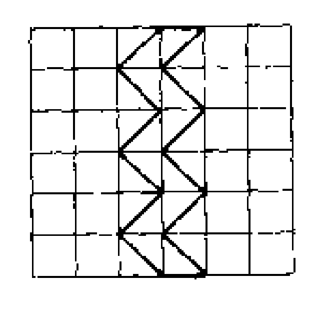


图 2

在上述讨论中,并没有要求多边形是凸的.如果限定格点多边形为凸多边形,则问题的难度就大得多.此时,利用 Pick 定理,我们发现格点凸多边形的面积的最小值与格点凸多边形内部格点个数密切相关.是否格点凸多边形的面积的最小值取决于格点凸多边形内部格点个数最小呢? 回答是肯定的,即格点凸多边形的面积的最小值由格点凸多边形内部格点个数的最小值唯一确定.这就是如下定理:

定理 3 设格点凸 n 边形面积的最小值为 g_n,格点凸 n 边形内部(非顶点的)格点的个数的最小值为 f_n,则

$$g_n=f_n+\frac{n}{2}-1\ .$$

证:设格点凸 n 边形的面积为 S_n,则由 Pick 定理,有

$$S_n=\frac{P}{2}+I-1\geqslant f_n+\frac{n}{2}-1\ ,$$

其中 P 是多边形边界上的格点(包括顶点)的个数,I 是多边形内部的格点个数.由于 f_n 是格点凸 n 边形内部格点个数的最小值,所以,存在格点凸 n 边形,其内部恰有 f_n 个格点.设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是这样的格点凸 n 边形中面积最小的.如果格点凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界上有非顶点的格点 M,不妨设 M 在边 A_nA_1 上.连接 MA_{n-1},则 $A_1A_2\cdots A_{n-1}M$ 是一个面积比 $A_1A_2\cdots A_n$ 更小的格点凸 n 边形,矛盾.所以格点凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边界上恰有 n 个格点(即 n 个顶点).又其内部恰有 f_n

个格点,所以

$$g_n = S(A_1A_2\cdots A_n) = f_n + \frac{n}{2} - 1.$$

证毕.

由定理 3 可知,欲求格点凸 n 边形面积的最小值 g_n,只须求出格点凸 n 边形的内部格点个数的最小值 f_n.

但是,对一般的自然数 n,探求 f_n 之值是相当困难的.我们仅知道 $n \leqslant 10$ 的一些结果,现分别介绍如下:

定理 4 $f_5 = f_6 = 1$.

证:首先,我们证明 $f_6 \geqslant f_5 \geqslant 1$.即要证明:内部不含格点的格点凸 5 边形不存在.用反证法.假设存在一个格点凸 5 边形,其内部不含格点(我们称这样的格点凸 5 边形为空 5 边形).由 Pick 定理知,格点多边形的面积均可表示为 $\frac{n}{2}$($n \in N$)的形式.由最小数原理,必有一个面积最小的空 5 边形 $ABCDE$.考察各顶点的坐标的奇偶性,只有 4 种情形:(奇,偶),(偶,奇),(奇,奇),(偶,偶).从而五边形必有两个顶点的坐标的奇偶性完全相同,它们连线的中点 P 仍为格点.又 P 不在凸 5 边形内部,从而 P 在凸 5 边形的某条边上.不妨设 P 在 AB 边上,则 P 为 AB 的中点.连结 PE,则 $PBCDE$ 是面积更小的空 5 边形,矛盾.

其次,如图 3 和图 4,分别存在格点凸 5 边形,凸 6 边形,使其内部恰含一个格点,故 $f_6 = f_5 = 1$.

定理 5 $f_7 = f_8 = 4$.

证:首先证明 $f_8 \geqslant f_7 \geqslant 4$.考察任意一个格点凸 7 边形 $A_1A_2\cdots A_7$,连接 A_1A_5,由定理 4,格点凸五边形 $A_1A_2\cdots A_5$ 中至少一个格点,设为 P_1.连接 P_1A_1, P_1A_5,则格点凸五边形

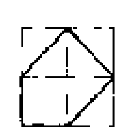


图 3

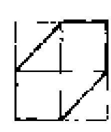


图 4

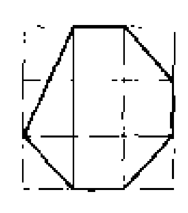


图 5

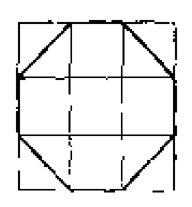


图 6

$A_1P_1A_5A_6A_7$内至少有一个格点P_2，且P_2异于P_1.作直线P_1P_2，格点凸7边形至少有5个顶点不在直线P_1P_2上，必有直线P_1P_2的某一侧含有其中3个顶点.这3个顶点与P_1,P_2构成格点凸五边形，其内部至少有一个格点P_3，P_3异于P_1和P_2.再作直线P_1P_3，P_2P_3，令直线P_1P_2对应区域π_3：π_3是以直线P_1P_2为边界且在三角形$P_1P_2P_3$异侧的一个半平面(不含直线P_1P_2).类似定义区域π_1,π_2.这样，3个区域π_1,π_2,π_3覆盖了平面上除三角形$P_1P_2P_3$外的所有点.7边形的7个顶点中必有3个顶点在同一个区域(不妨设为π_3)中.此3点与P_1,P_2构成一个格点凸五边形，其内部至少有一个格点P_4.于是，$f_7\geqslant 4$.

如图5和图6，分别存在格点凸7边形，8边形，使其内部恰含4个格点，故$f_7=f_8=4$.

定理6 $f_9=7$.

为了证明此定理，我们将格点凸9边形$A_1A_2\cdots A_9$的顶点$A_1,A_2,\cdots,A_9$染红色，称这些顶点为红点.并将定理分解为如下一些命题：

命题1 $f_9\geqslant 5$.

证：因为$f_7=4$，所以，可在格点凸9边形内取定4个格点.考察此4点的凸包，设为凸k边形$B_1B_2\cdots B_k$($2\leqslant k\leqslant 4$，当凸包为线段时，我们认为$k=2$).

考察任一条直线 $B_iB_{i+1}(i=1,2,\cdots,k)$，它把平面划分为两个开的半平面(不含直线 B_iB_{i+1})．称其中一个不含凸 k 边形 $B_1B_2\cdots B_k$ 的开半平面为直线 B_iB_{i+1}所对应的区域，记为 π_i．那么，k 个区域 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k$ 覆盖了所有的红点．注意到 $k\leqslant 4$，由抽屉原理，必有一个区域(设为 π_1)，至少含有 3 个红点(图 7)．设此 3 个红点为 A_i,A_{i+1},A_{i+2}，此时，格点凸 5 边形 $B_1B_2A_iA_{i+1},A_{i+2}$内至少有一个红点，所以 $f_9\geqslant 4+1=5$．命题 1 获证．

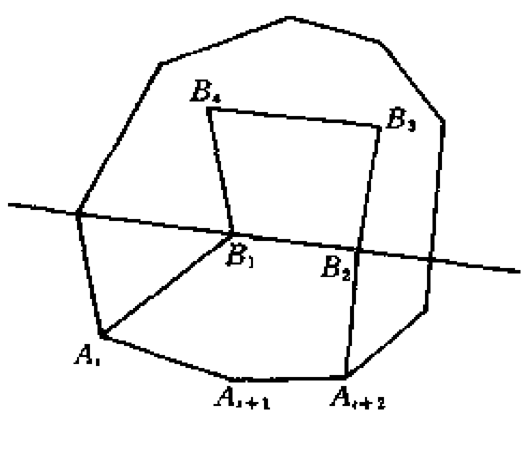


图 7

命题 2 $f_9\geqslant 6$．

证：因为 $f_9\geqslant 5$，所以，可在格点凸 9 边形内取定 5 个格点．考察此 5 点的凸包，设为凸 k 边形($2\leqslant k\leqslant 5$)．

(1) $k\leqslant 4$，类似于命题 1 的证明，有 $f_9\geqslant 5+1=6$．

(2) $k=5$，则此格点凸 5 边形内至少有一个格点．所以，$f_9\geqslant 5+1=6$．命题 2 获证．

命题 3 $f_9\geqslant 7$．

证：因为 $f_9\geqslant 6$，所以，可在格点凸 9 边形内取定 6 个格点．考察此 6 点的凸包，设为凸 k 边形($2\leqslant k\leqslant 6$)．

(1) $k\leqslant 4$，类似于命题 1 的证明，有 $f_9\geqslant 6+1=7$．

(2) $k=5$，设此格点凸 5 边形为 $B_1B_2\cdots B_5$，它内部至少有一个格点，设为 P．考察任一条直线 $B_iB_{i+1}(i=1,2,\cdots,5)$，它把平面划分为两个开的半平面．称其中一个不含五边形

$B_1B_2\cdots B_5$ 的开半平面为直线 B_1B_{i+1}所对应的区域，记为 π_i. 那么，5 个区域 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_5$ 覆盖了所有的红点. 令 $\alpha_i=\pi_{i-1}\cap\pi_i$，则 α_i 是$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1}$的对顶角的内部.

（i） 如果有一个区域 π_i，其内部有 3 个红点，则此 3 个红点与 π_i 的两个边界格点构成凸 5 边形，其内部至少有一个格点（图 8），所以，$f_9\geqslant 6+1=7$.

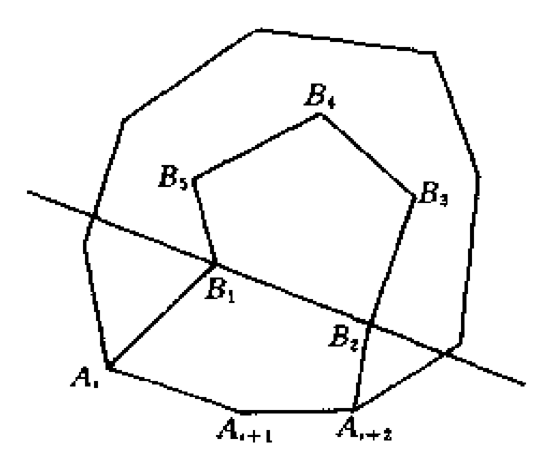


图 8

（ii） 如果有 4 个区域 π_i，每一个 π_i 内都恰有 2 个红点，设此 4 个区域为 π_1，π_2，π_3，π_4. 此时，区域 π_5 内有一个红点. 由于平面上共有 9 个红点，从而任何两个区域没有公共的红点. 这样，角形区域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 内无红点. 于是，π_i 内的红点都在$\angle B_iPB_{i+1}$（$i=1,2,\cdots,5$）内. 不妨设$\angle B_1PB_2$ 的两个红点为 A_i，A_{i+1}，则格点凸 5 边形 $PB_1A_iA_{i+1}B_2$ 内至少有一个格点（图 9），所以，$f_9\geqslant 6+1=7$. 命题 3 获证.

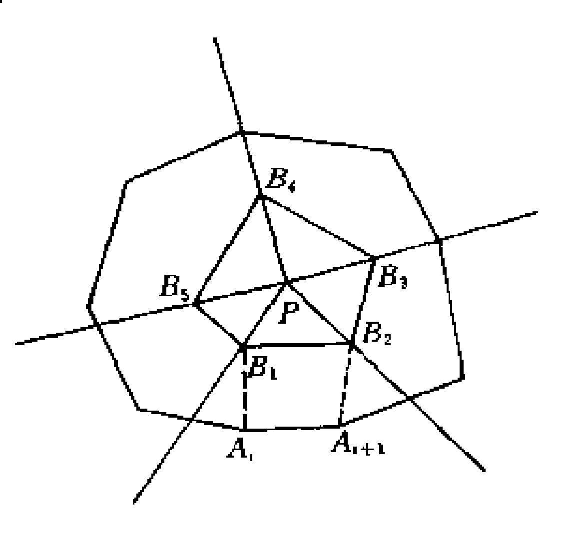


图 9

最后，由图 10 可知，存在格点凸 9 边形，使其内部恰有 7 个格点. 故 $f_9=7$，定理 6 获证.

定理 7　$f_{10}=10$.

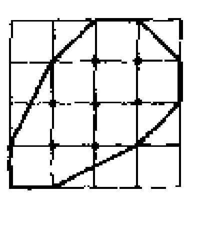


图　10

为了证明上述结论，我们将格点凸 10 边形 $A_1A_2\cdots A_{10}$的顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$染红色，并称这些顶点为红点.我们证明如下一些命题：

命题 4　$f_{10}\geqslant 8$.

证：因为 $f_9=7$，所以，可在格点凸 10 边形内取定 7 个格点.考察此 7 点的凸包，设为凸 k 边形($2\leqslant k\leqslant 7$).

(1)　$k\leqslant 4$，类似于 $f_9\geqslant 5$ 的证明，有 $f_{10}\geqslant 7+1=8$.

(2)　$k=5$，设凸包为五边形 $B_1B_2\cdots B_5$.则它的内部至少有一个格点，设为 P.类似地考察 5 个开半平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_5$，它们覆盖了所有的红点.令 $\alpha_i=\pi_{i-1}\cap\pi_i$，则 α_i 是$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1}(i=1,2,\cdots,5)$的对顶角的内部.

(i)　如果有一个区域 π_i，其内部有 3 个红点，则此 3 个红点与 π_i 的两个边界格点构成凸 5 边形，其内部至少有一个格点.所以，$f_{10}\geqslant 7+1=8$.

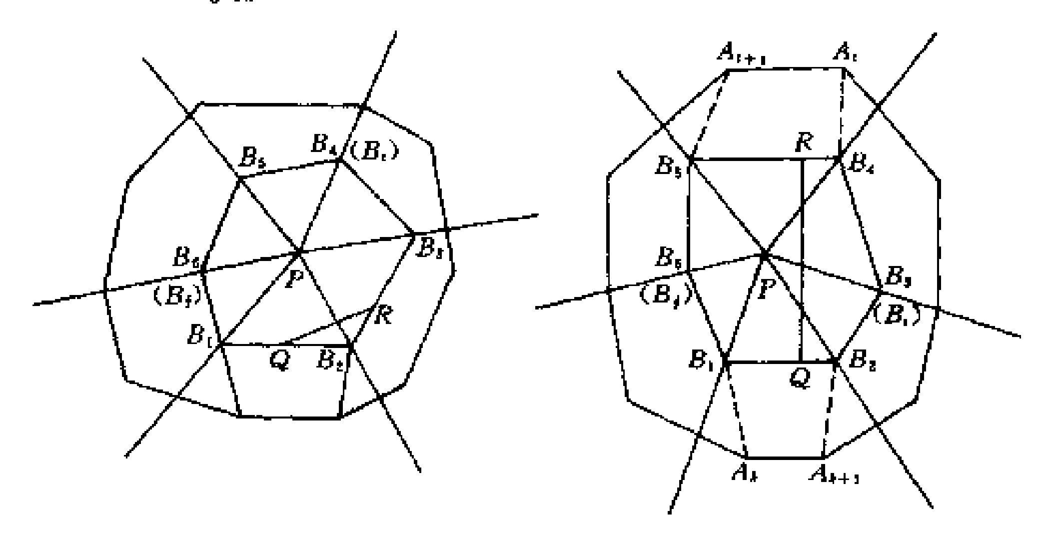


图　11　　　　　　图　12

(ii)　如果每一个区域 π_i 内都恰有 2 个红点，此时，任

何两个区域没有公共的红点.这样,角形区域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 内无红点.于是,π_i 内的红点都在$\angle B_iPB_{i+1}(i=1,2,\cdots,5)$内.不妨设$\angle B_1PB_2$ 的两个红点为 A_i, A_{i+1},则格点凸 5 边形 $PB_1A_iA_{i+1}B_2$ 内至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+1=8$.

(3) $k=6$,设凸包为六边形 $B_1B_2\cdots B_6$.则它的内部至少有一个格点,设为 P.类似地考察 6 个开半平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_6$,它们覆盖了所有的红点.令 $\alpha_i=\pi_{i-1}\cap\pi_i$,则 α_i 是$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$的对顶角的内部.

(i) 如果有一个区域 π_i,其内部有 3 个红点,则此 3 个红点与 π_i 的两个边界格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+1=8$.

(ii) 如果有 4 个区域 π_i,每一个区域的内部各有 2 个红点,另两个区域中每一个至多有一个红点.此时,任何两个区域没有公共的红点.这样,角形区域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 内无红点.于是,$\pi_i(i=1,2,3,4)$内的红点都在$\angle B_iPB_{i+1}$内.不妨设$\angle B_1PB_2$ 的两个红点为 A_i, A_{i+1},则格点凸 5 边形 $PB_1A_iA_{i+1}B_2$ 内至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+1=8$.

(iii) 如果有 5 个区域 $\pi_i(1\leqslant i\leqslant 6)$,每一个区域的内部各有两个红点,另一个区域中至多有一个红点.此时,恰有某两个区域 π_i,π_j,它们的公共部分有一个红点,即恰有一个角形区域 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant 6)$内有一个红点.不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 内无红点,则 $\pi_i(i=1,2,3,4,5)$内的红点都在$\angle B_iPB_{i+1}$内.不妨设$\angle B_1PB_2$ 的两个红点为 A_i, A_{i+1},则格点凸 5 边形 $PB_1A_iA_{i+1}B_2$ 内至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+1=8$.

(4) 若 $k=7$,则凸包七边形 $B_1B_2\cdots B_7$ 的内部至少有 4 个格点.于是,$f_{10}\geqslant 7+4=11$.命题 4 获证.

命题 5 $f_{10}\geq 9$.

证:因为 $f_{10}\geq 8$,所以,可在格点凸 10 边形内取定 8 个格点.考察此 8 点的凸包,设为凸 k 边形($2\leq k\leq 8$).

(1) $k\leq 4$,类似于 $f_9\geq 5$ 的证明,有 $f_{10}\geq 8+1=9$.

(2) $k=5$,类似于 $f_{10}\geq 8$ 的证明,有 $f_{10}\geq 8+1=9$.

(3) $k=6$,设凸包为六边形 $B_1B_2\cdots B_6$,则它的内部至少有一个格点,设为 P.类似地考察 6 个开半平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_6$,它们覆盖了所有的红点.令 $\alpha_i=\pi_{i-1}\cap\pi_i$,则 α_i 是$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1}$($i=1,2,\cdots,6$)的对顶角的内部.

(i) 如果有一个区域 π_i,其内部有 3 个红点,则此 3 个红点与 π_i 的两个边界格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geq 8+1=9$.

(ii) 如果恰有 4 个区域 π_i,每一个区域的内部各有 2 个红点,另两个区域中每一个至多有一个红点.此时,任何两个区域没有公共的红点.这样,角形区域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 内无红点.于是,π_i($i=1,2,3,4$)内的红点都在$\angle B_iPB_{i+1}$内.不妨设$\angle B_iPB_{i+1}$的两个红点为 A_r, A_{r+1},$\angle B_jPB_{j+1}$的两个红点为 A_t, A_{t+1},则格点凸 5 边形 $PB_iA_rA_{r+1}B_{i+1}$与 $PB_jA_tA_{t+1}B_{j+1}$内都至少有一个格点.所以,$f_{10}\geq 7+2=9$.

(iii) 如果恰有 5 个区域 π_i($1\leq i\leq 6$),每一个区域的内部各有 2 个红点,另一个区域中至多有一个红点.此时,考察每一条射线 PB_i($i=1,2,\cdots,6$),至多有一条射线上有至多一个红点.将剩下 9 个红点归入 6 个角形区域$\angle B_iPB_{i+1}$($i=1,2,\cdots,6$),由于每个角形区域内至多有两个红点,必有两个角形区域内各有两个红点.不妨设$\angle B_iPB_{i+1}$内有两个红点 A_r,A_{r+1},$\angle B_jPB_{j+1}$内有两个红点 A_t, A_{t+1},则格点凸 5 边形

$PB_iA_rA_{r+1}B_{i+1}$与 $PB_jA_tA_{t+1}B_{j+1}$内都至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+2=9$.

(iv) 如果6个区域 $\pi_i(i=1,2,\cdots,6)$的每一个内部各有2个红点,此时,考察每一条射线 $PB_i(i=1,2,\cdots,6)$,至多有两条射线上有红点.将剩下8个红点归入6个角形区域 $\angle B_iPB_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$,由于每个角形区域内至多有两个红点,必有两个角形区域内各有两个红点.不妨设$\angle B_iPB_{i+1}$内有两个红点 A_r, A_{r+1},$\angle B_jPB_{j+1}$内有两个红点 A_t, A_{t+1},则格点凸5边形 $PB_iA_rA_{r+1}B_{i+1}$,与 $PB_jA_tA_{t+1}B_{j+1}$内都至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+2=9$.

(4) 若 $k\geqslant 7$,则此凸包内至少有4个格点.所以,$f_{10}\geqslant 7+4=11$.

综上所述,命题5获证.

命题6 $f_{10}\geqslant 10$.

证:因为 $f_{10}\geqslant 9$,所以,可在格点凸10边形内取定9个格点.考察此9点的凸包,设为凸 k 边形$(2\leqslant k\leqslant 9)$.

(1) $k\leqslant 4$,类似于$f_9\geqslant 5$的证明,有 $f_{10}\geqslant 9+1=10$.

(2) $k=5$,类似于 $f_{10}\geqslant 8$ 的证明,有 $f_{10}\geqslant 9+1=10$.

(3) $k=6$,设凸包为六边形 $B_1B_2\cdots B_6$.则它的内部至少有一个格点.设为 P.类似地考察6个开半平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_6$,它们覆盖了所有的红点.令 $\alpha_i=\pi_{i-1}\cap\pi_i$,则 α_i 是$\angle B_{i-1}B_iB_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$的对顶角的内部.

(i) 如果有一个区域 π_i,其内部有3个红点,则此3个红点与 π_i 的两个边界格点构成凸5边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 9+1=10$.

(ii) 如果恰有4个区域 $\pi_i(1\leqslant i\leqslant 6)$,每一个区域的内

部各有 2 个红点,另两个区域中每一个内部各有一个红点.此时,任何两个区域没有公共的红点.这样,角形区域 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 内无红点.于是,$\pi_i(i=1,2,3,4)$ 内的红点都在 $\angle B_iPB_{i+1}$ 内.注意到每个角形区域 $\angle B_iPB_{i+1}$ 内至多有两个红点,从而有 4 个这样的角形区域 $\angle B_iPB_{i+1}$,每一个区域内都有两个红点.这两个红点与相应的角形区域边界上的 3 个格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 6$(各 B_i)$+1$(点 P)$+4=11$.

(iii) 如果恰有 5 个区域 $\pi_i(1\leqslant i\leqslant 6)$,每一个区域的内部各有 2 个红点,另一个区域中至多有一个红点.此时,考察每一条射线 $PB_i(i=1,2,\cdots,6)$,至多有一条射线上有至多一个红点.将剩下 9 个红点归入 6 个角形区域 $\angle B_iPB_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$,由于每个角形区域内至多有两个红点,必有 3 个角形区域内各有两个红点.这两个红点与相应的角形区域边界上的 3 个格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 6$(各 B_i)$+1$(点 P)$+3=10$.

(iv) 如果 6 个区域 $\pi_i(1\leqslant i\leqslant 6)$的每一个内部各有 2 个红点,此时,考察每一条射线 PB_i,至多有两条射线上有红点.不妨设有 t 条这样的射线上有红点.当 $t=1$ 时,将剩下 9 个红点归入 6 个角形区域 $\angle B_iPB_{i+1}(i=1,2,\cdots,6)$,由于每个角形区域内至多有两个红点,必有 3 个角形区域内各有两个红点.这两个红点与相应的角形区域边界上的 3 个格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 6$(各 B_i)$+1$(点 P)$+3=10$.

下设 $t=2$,即有两条射线上有红点.

(a) 若此两射线相邻,不妨设为 PB_1,PB_2.由于各 π_i 内至多两个红点,从而 $\angle B_1PB_2$ 内无红点,$\angle B_2PB_3$,$\angle B_6PB_1$

各至多有一个红点.剩下至少 6 个红点分布在另外 3 个角形区域,若有一个角形区域内有 3 个红点,则 $f_{10}\geqslant 9+1=10$;若此 3 个角形区域内都各有两个红点,这两个红点与相应的角形区域边界上的 3 个格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 6$(各 B_i) $+1$(点 P) $+3=10$.

(b) 若此两射线不相邻,不妨设它们为 PB_i, PB_j($j-i\geqslant 2$).因各 π_i($1\leqslant i\leqslant 6$)内至多两个红点,从而$\angle B_{i-1}PB_i$, $\angle B_iPB_{i+1}$, $\angle B_{j-1}PB_j$, $\angle B_jPB_{j+1}$,内各至多有一个红点.剩下至少 4 个红点分布在另外 2 个角形区域:d_1, d_2 内.若有一个角形区域 d_i($1\leqslant i\leqslant 2$)内有 3 个红点,则此三个红点与 d_i 边界上的两个格点构成凸 5 边形,其内部至少有一个格点.于是 $f_{10}\geqslant 9+1=10$.因而不妨设两个角形区域 d_1, d_2 内各有两个红点.

如果 d_1, d_2 相邻,设 $d_1=\angle B_1PB_2$, $d_2=\angle B_2PB_3$,它们各含有的两个红点分别为 A_k, A_{k+1}及 A_{k+2}, A_{k+3}.则格点凸 5 边形 $PB_1A_kA_{k+1}B_2$ 内有一个格点 Q, $PB_2A_{k+2}A_{k+3}B_3$ 内有一个格点 R.若 Q 在$\triangle PB_1B_2$ 外,则 $f_{10}\geqslant 9+2=10$.不妨设 Q 在$\triangle PB_1B_2$ 内或其边界上.若 Q 不在线段 B_1B_2 上,则五边形 $QB_1A_kA_{k+1}B_2$ 内有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 9+1=10$.于是不妨设 Q 在线段 B_1B_2 上.同样,可设 R 在线段 B_2B_3 上(图 11).此时,五边形 PB_1QRB_3 内有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 9+1=10$.

如果 d_1, d_2 不相邻,又 PB_i, PB_j($j-i\geqslant 2$)不是它们的边界,必有 $j-i=3$.所以可设 $d_1=\angle B_1PB_2$, $d_2=\angle B_4PB_5$,它们各含有的两个红点分别为 A_k, A_{k+1}及 A_1, A_{1+1}.类似地可设线段 B_1B_2 上有一个格点 Q,线段 B_2B_3 上有一个格点 R(图 12).此时,五边形 $QB_2B_3B_4R$, $RB_5B_6B_1Q$ 内各有一个格点.所以,$f_{10}\geqslant 6+2+2=10$.

综上所述,命题 6 获证.

最后,由图 13 可知,存在格点凸 10 边形,使其内部恰有 10 个格点. 故 $f_{10}=10$,定理 7 获证.

利用更精细的分类,我们可以证明 $f_{11}\geqslant 16$. 图 14 表明 $f_{11}\leqslant 17$. 但 $f_{11}=16$ 还是 17,至今没有被确定. 读者可作深入的研究.

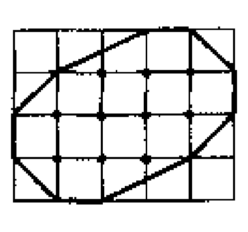


图 13

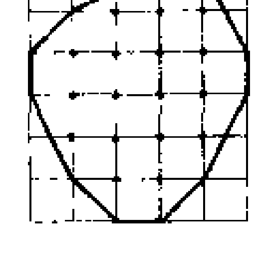


图 14

由定理 3 到定理 7 可知,若设格点凸 n 边形面积的最小值为 g_n,则

$$g_5=\frac{5}{2},g_6=3,g_7=\frac{13}{2},g_8=7,g_9=\frac{21}{2},g_{10}=14.$$

以上我们采用的方法主要是分类. 但这种方法不适用一般的格点凸 n 边形. 若想直接求出格点凸 n 边形面积的最小值,改进方法是十分必要的.

由于求格点凸 n 边形的面积的最小值相当困难,我们可以考虑弱一点的问题:是否存在多项式 $p(n),q(n)$,使 $p(n)\leqslant g_n\leqslant q(n)$? 若这样的多项式不存在,则是否可以得到关于 g_n 的其他形式的估计? 这些都留给读者去研究.

比格点凸多边形更严格的一种多边形是格点正多边形. 但遗憾的是,格点正多边形只有一种,即格点正方形,因而格点正多边形的研究就失去了意义. 于是,我们将正多边形减弱为等边多边形加以研究. 所谓等边多边形是指各边都相等的简单(不自相交且任何三个连续顶点不共线)多边形. 等边多边形不一定是凸多边形,当然更不一定是正多边形. 我们已经知道,当 $n\neq 4$ 时,格点正 n 边形不存在. 那么是否存在格点

等边 n 边形呢？下述定理回答了这一问题.

定理 8 当且仅当 $n(n>2)$ 为偶数时，存在格点等边 n 边形.

证：一方面，反设 n 为奇数时存在格点等边 n 边形，由于格点 n 边形的边长的平方为自然数，由最小数原理，存在边长最小的格点等边 n 边形.记其中一个边长最小的格点等边 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，边长为 a.又设 A_i 的坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$.则

$$
\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2,\\
&(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=a^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2=a^2.
\end{aligned}
$$

以上 n 个等式相加，得

$$2\left(\sum x_i^2+\sum y_i^2-\sum x_ix_{i+1}-\sum y_iy_{i+1}\right)=na^2.$$

因为 n 是奇数，所以 $2\mid a^2$.由上述 n 个等式知，对一切 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$x_i-x_{i+1}\equiv y_i-y_{i+1}\pmod 2$$

其中下标按模 n 理解，即 $x_{n+1}=x_1$.

若 $x_i-x_{i+1}\equiv y_i-y_{i+1}\equiv 0\pmod 2$，则以点 (x_1,y_1) 为位似中心，$\frac{1}{2}$ 为位似比作位似变换，得到多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$，它是一个边长更小的格点等边 n 边形，矛盾.所以 $x_i-x_{i-1}\equiv y_i-y_{i+1}\equiv 1\pmod 2$.由 $x_i-x_{i+1}\equiv 1\pmod 2$，得 $\sum(x_i-x_{i+1})\equiv n$，即 $0\equiv n\pmod 2$，矛盾.所以 n 为奇数时，不存在格点等边 n 边形.

另一方面，当 $n>2$，n 为偶数时，由图 15 可知，存在格点等边 n 边形，定理 8 获证.

定理 9 格点等边 n 边形的最小周长：$p_n=n(n=4k$ 且

$n \neq 8$)，或 $p_n = \sqrt{5}n$（$n = 4k+2$ 或 $n = 8$）.

证：取一个边长最小的格点等边 n 边形：$A_1A_2\cdots A_n$，设其边长为 a. 又设 A_i 的坐标为 $(x_i,\ y_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 则

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2 \equiv 0,1,2 \pmod 4). \quad ①$$

若 $a^2 = 1$，即 $a = 1$. 则格点等边 n 边形的边都是单位正方形的边，且横向边（平行于 x 轴）与纵向边（平行于 y 轴）交替出现. 于是，格点等边 n 边形的横向边与纵向边的条数相等. 设想一个点从格点等边 n 边形的某个顶点出发，绕格点等边 n 边形的边界运动一周，则向右通过和向左通过的横向边数相等，向上通过和向下通过的纵向边数也相等. 于是多边形的边数 n 为 4 的倍数. 如果 $n = 8$，则向右，向左通过的横向边都有两条，所以多边形在一个宽为 2 的纵向带形内. 同样，多边形也在一个宽为 2 的横向带形内.

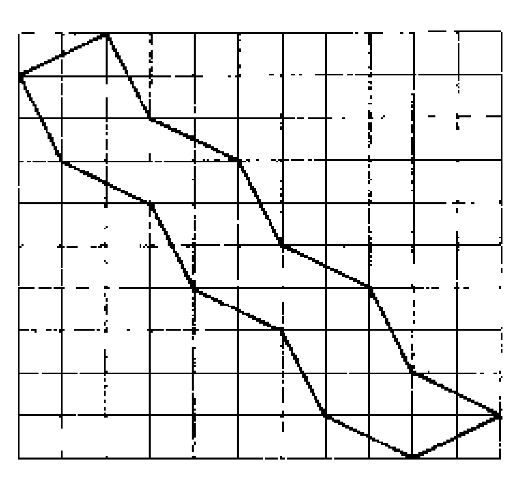


图 15

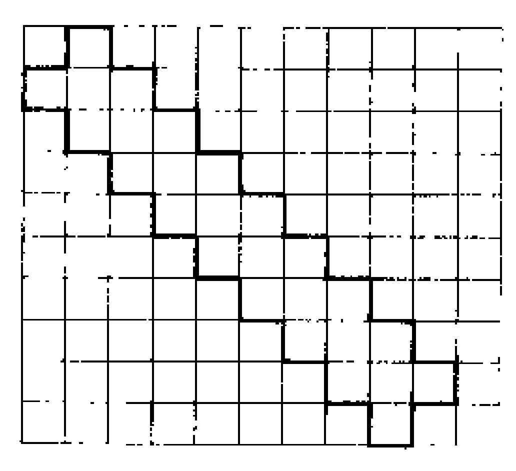


图 16

所以多边形在一个 2×2 的正方形内. 但 2×2 的正方形内不存在格点等边 8 边形，矛盾. 所以 $n \neq 8$. 由图 16 可知，当 $4 \mid n$ 且 $n \neq 8$ 时，存在边长为 1 的等边 n 边形，所以 $p_n = n$.

当 $n = 8$ 或 $4 \nmid n$ 时，由上面的讨论可知，$a > 1$. 此时，若 $a^2 = 2$，则 $a = \sqrt{2}$，即各边都是单位正方形的对角线. 将此格点

等边 n 边形绕点(x_1,y_1)旋转$45°$,并以(x_1,x_2)为位似中心,$\frac{1}{\sqrt{2}}$为位似比,作位似变换,便得到边长更小的格点等边 n 边形,矛盾.由①知,$a^2\neq3$.若 $a^2=4$,则 $a=2$.并以(x_1,x_2)为位似中心,$\frac{1}{2}$为位似比,作位似变换,便得到边长更小的格点等边 n 边形,矛盾.所以 $a^2\geqslant5$.

由图15可知,对一切大于2的偶数 n,存在边长为$\sqrt{5}$的等边 n 边形,所以 $p_n=\sqrt{5}n$ ($n=4k+2$ 或 $n=8$).

下面我们讨论一类特殊的格点多边形——格径多边形.

定义 如果格点多边形的边都平行于格线,则称之为格径多边形.

格径多边形具有如下两个显然的性质:

性质1 格径多边形的边长都是整数.

性质2 格径多边形中任何两条相邻的边互相垂直,且其中一条是横向(平行 x 轴)边,另一条是纵向(平行 y 轴)边.

定理10 当且仅当 $n(n>2)$为偶数时,存在格径 n 边形.

证:一方面,由性质2知,格径 n 边形的边横向、纵向交错出现.注意到格径 n 边形是封闭折线,于是横向、纵向边的条数相等.所以 n 为偶数.

另一方面,对任何大于2的偶数 n,由图17可知,存在格径 n 边形.定理10获证.

下面看一个格径多边形的面积的例子:

例1 给定一个格径100边形 P,其边长都是奇数.求证:P 的面积为奇数.

证:不妨设 P 的顶点全在第一象限,

图 17

否则，可通过适当的平移化为这一情形．想象一点从 P 的某个顶点出发，按顺时针方向沿 P 的边界运动一周，将依次通过的横向边记为 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$，它们在 x 轴上的投影为 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_{50}$．分别以 $a_i, a'_i (i=1,2,\cdots,50)$ 为两对边的矩形的面积记为 S_i（图 18），那么 S_P 是各 S_i 的代数和．即 $S_P = \sum\limits_{i=1}^{50} t_i S_i$．其中，当点经过 a_i 时的运动方向与 x 轴方向一致时，$t_i = 1$；当点经过 a_i 时的运动方向与 x 轴方向相反时，$t_i = -1$．

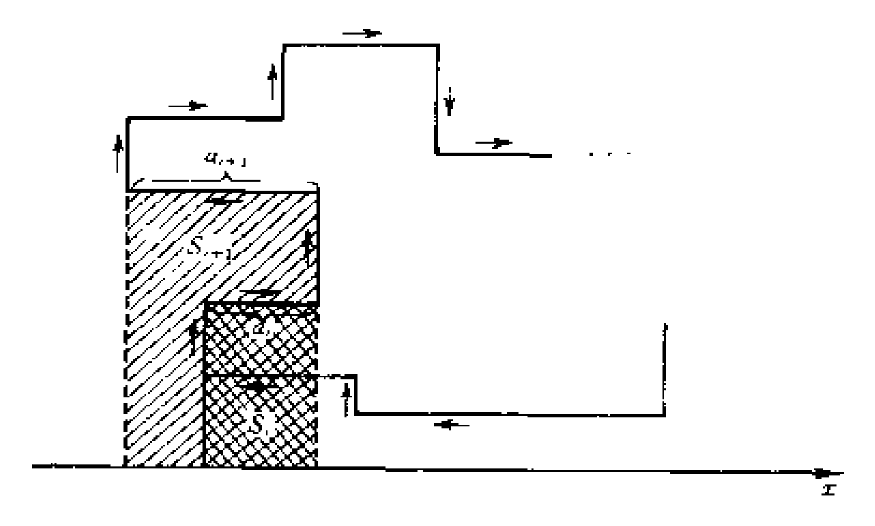


图 18

由于 P 的边长都是奇数，于是 a_i 都是奇数，而且矩形 S_i 与矩形 S_{i+1} 的高度差为第 i 条纵向边长，亦为奇数．于是 S_i 与 S_{i+1} 不同奇偶．所以 $S_P = \sum\limits_{i=1}^{50} t_i S_i$ 的右边恰有 25 个奇数，故 S_P 为奇数．证毕．

本题是 1988 年 IMO 国家队选拔考试题．原解答是借助复数计算 P 的面积的，过程相当繁琐．这里的解答充分利用了几何直观，而恰当地将 S_P 划分为若干个矩形求面积是解题的关键，这来源于对已知条件的灵活运用．而且，这一方法还可将问题推广到任何格点 $8n+4$ 边形．

下面再给出若干与格点有关的其他例子.

例 2 求内部不含格点的圆的面积的最大值.

解:设内部不含格点的圆的半径为 r,作圆的内接正方形,使其边平行坐标轴,则其边长为$\sqrt{2}r$.由于正方形内部无格点,所以正方形的边长不大于 1.于是$(\sqrt{2}r)^2\leqslant1$,$r\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以$S_{圆}\leqslant\frac{\pi}{2}$.又如图 19,存在内部不含格点的圆,使 $S_{圆}=\frac{\pi}{2}$,故内部不含格点的圆的面积的最大值为$\frac{\pi}{2}$.

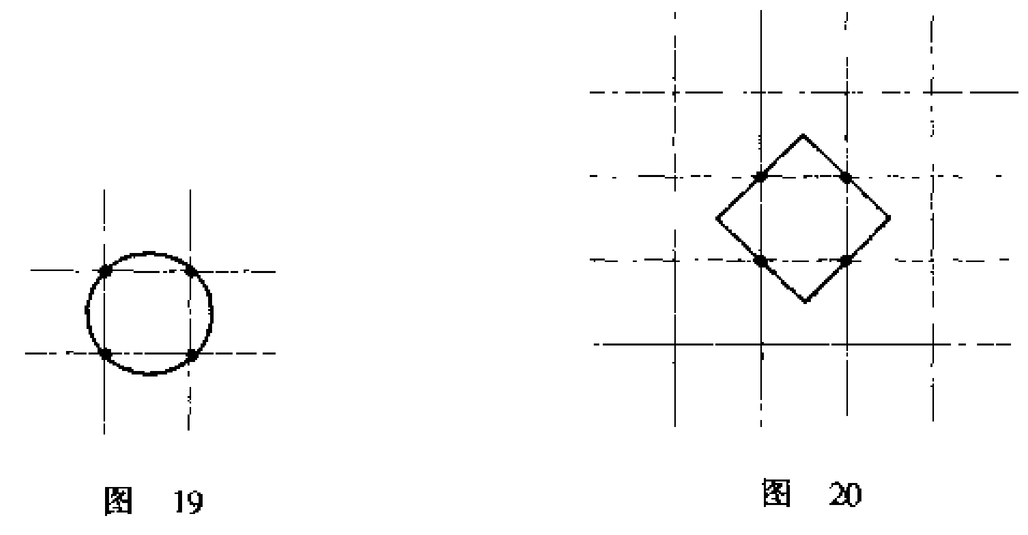


图 19　　　　图 20

例 3 求内部不含格点的正方形的面积的最大值.

解:设内部不含格点的正方形的边长为 a,作正方形的内接圆,其半径为$\frac{a}{2}$.此圆的内部无格点,故 $S_{圆}\leqslant\frac{\pi}{2}$,即$\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\leqslant\frac{\pi}{2}$.所以 $a^2\leqslant2$,即 $S_{正方形}\leqslant2$.如图 20,存在正方形使 $S_{正方形}=2$,故内部不含格点的正方形的面积的最大值为 2.

例 4 求内部恰有一个格点的圆的最大面积.

解:首先,以任意一个格点为圆心作单位圆,则此圆的面

积为 π.

其次,假定某个圆的圆心为 P,设 P 所在的单位格点正方形为 $ABCD$(P 可能在正方形 $ABCD$ 的边界上).假设圆 P 的半径大于 1.若点 P 是格点,则圆 P 内至少有 4 个格点,矛盾;若点 P 不是格点,我们证明:点 A,C 中至少有一个在圆 P 内部.实际上,若 A 不在圆 P 内部,则 $|PA|\geqslant 1$,于是 P 在以 A 为圆心的扇形 ABD 的外部或边界上(图 21).但 P 被正方形 $ABCD$ 盖住,所以 P 被曲边三角形 BCD 盖住,但 P 不是格点,所以 P 不与 B,D 重合.于是 $|PC|<1$,即 C 在圆 P 内部.

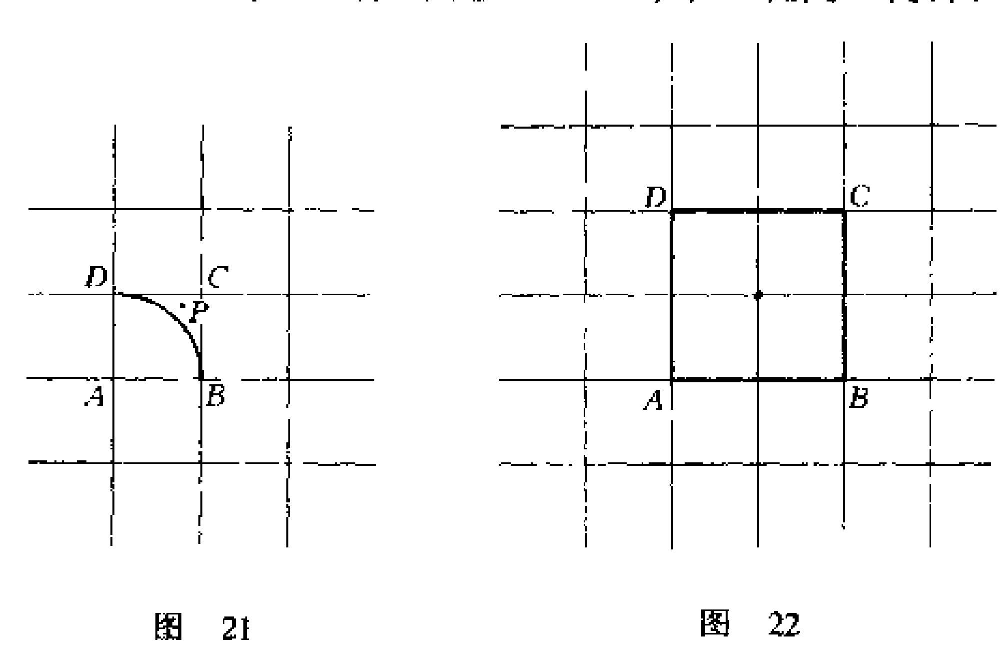


图 21　　　　图 22

同理,B,D 中至少有一个点在圆 P 内部,所以圆 P 内部至少有两个格点,矛盾.所以圆 P 的半径不大于 1,即面积不大于 π.故内部恰有一个格点的圆的最大面积为 π.

例 5　求内部恰有一个格点的正方形的面积的最大值.

解:设正方形的边长为 a,则其内切圆半径为 $\frac{a}{2}$.注意到此圆的内部至多一个格点.由例 3 可知,$\frac{a}{2}\leqslant 1$,所以 $S_{正方形}=$

$a^2 \leqslant 4$.由图22,存在面积为4的正方形 $ABCD$,其内部恰有一个格点.所以内部恰有一个格点的正方形的面积的最大值为4.

例6 求内部恰有一个格点的格点三角形的面积的最大值.(第31届IMO备选题)

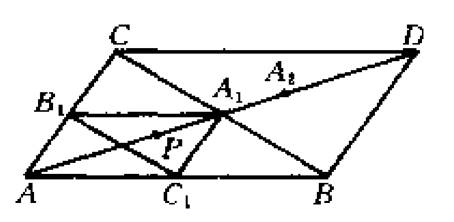


图 23

解:设格点三角形 ABC 内部恰有一个格点 P,记 BC,CA,AB 的中点分别为 A_1,B_1,C_1.由于格点 A 关于 P 的对称点 A_2 仍为格点,格点 B,C 关于 P 的对称点也为格点,且它们都不在三角形 ABC 的内部.于是点 P 被三角形 $A_1B_1C_1$ 盖住,且 A_2 被三角形 BCD 盖住(图23).

(1) 若 A_2 在三角形 BCD 内部,则格点 P,A_2 关于点 A_1 对称.实际上,设 A_2 关于 A_1 的对称点为 P',由于 A_1 是 BC 的中点,且 A_2 为格点,从而 P' 为格点,且 P' 在三角形 $B_1C_1A_1$ 内部,故 P 与 P' 重合.又 A_2,A 关于 P 对称,所以 A,P,A_1,A_2 共线.注意到 P,A_2 是直线 AD 上两个相邻的格点,故 $PA_2=AP$,所以 $AP=\frac{2AA_1}{3}$.过 P 作 $HG/\!/BC$,则 $PG=PH=\frac{BC}{3}$(图24).由于线段 PG 上无格点,于是线段 BC 上相邻两个格点之距大于 $PG=\frac{BC}{3}$,从而线段 BC 上至多有两个格点.同理,三角形 ABC 的其他边上也至多有两个格点.所以 $S_{BAC}\leqslant 1+\frac{3+6}{2}-1=\frac{9}{2}$.

(2) 若 A_2 在三角形 BCD 的边界上,则 P 在三角形 $A_1B_1C_1$ 的边界上.不妨设 P 在边 B_1C_1 上(图25).

因为 $\max\{PB_1,PC_1\}\geqslant\frac{B_1C_1}{2}=\frac{BC}{4}$,从而边 BC 上至多3

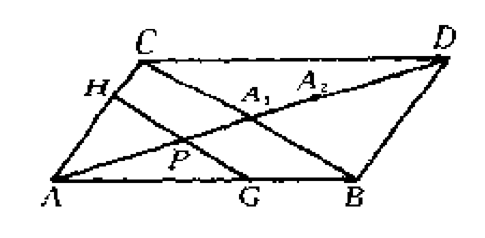


图 24

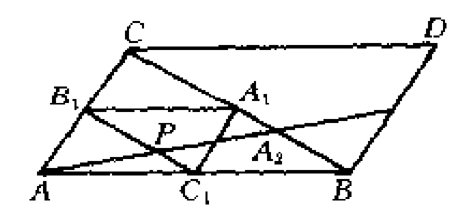


图 25

个格点.又$|A_1B_1|=|AC_1|$,从而线段 A_1B_1 上无格点.注意到 $A_1B_1=AC_1=\dfrac{AB}{2}$,于是,边 AB 上至多一个格点.同理,边 AC 上至多一个格点.所以 $S_{ABC}\leqslant 1+\dfrac{5+3}{2}-1=4<\dfrac{9}{2}$.

最后,由图 26 可知,存在内部恰含一个格点的格点三角形 ABC,使 $S_{ABC}=\dfrac{9}{2}$.故 S_{ABC}的最大值为$\dfrac{9}{2}$.

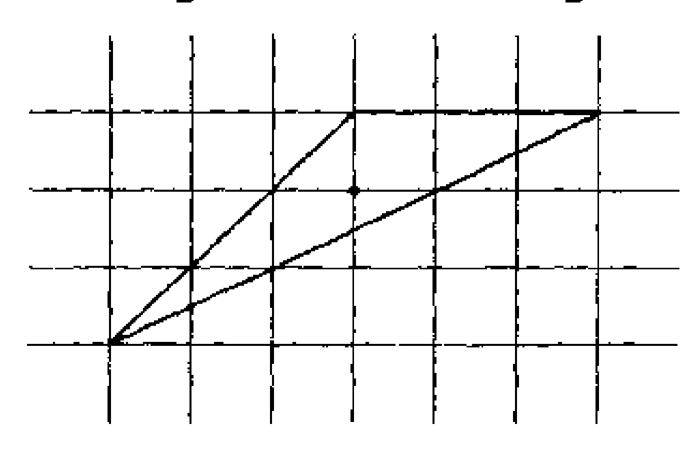


图 26

例 7 以原点 O 为圆心,作半径为 R 的圆($R>\sqrt{2}$),使圆内部恰含有 n 个格点.求证:$|\pi R^2-n|<4\sqrt{2}\pi R$.

证:对圆内每一个格点,作一个单位正方形,使此格点为单位正方形的左下角顶点.共作出了 n 个单位正方形,这些正方形的面积的和为 n(图 27).

分别以 $R+\sqrt{2}$,$R-\sqrt{2}$为半径,O 为圆心作两个圆,其中

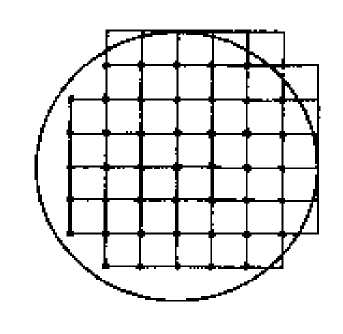


图 27

图 28

大圆覆盖了上述所有 n 个正方形，而这 n 个正方形覆盖了小圆．于是 $\pi(R+\sqrt{2})^2 \geqslant n \geqslant \pi(R-\sqrt{2})^2$，所以 $2\sqrt{2}\pi R+2\pi \geqslant n-\pi R^2 \geqslant -2\sqrt{2}\pi R+2\pi$，即 $|\pi R^2-n|<4\sqrt{2}\pi R$．

例 8 半径为 1.1 的圆至少盖住多少个格点？至多盖住多少个格点？

解： 设半径为 1.1 的圆盖住的格点个数为 r，则图 28，29 分别给出 $r=2$ 和 $r=5$ 的情形．下面证明 $2 \leqslant r \leqslant 5$．

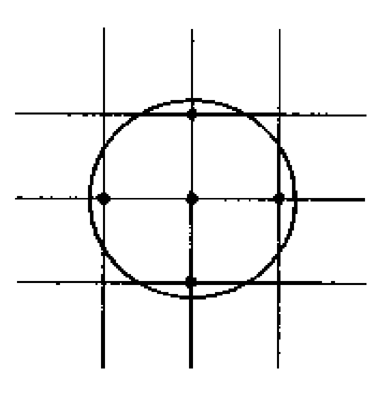


图 29

首先，若 $r>5$，考察半径为 1.1 的圆所盖住的 6 个格点（若 $r>6$，则任取其中 6 个格点），则这 6 个格点必分布在三条相邻的横向格线和三条相邻的纵向格线上（图 29）．由此可知，必有两个格点之距不小于 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}>2.2$，矛盾．

其次，若 $r<2$，设半径为 1.1 的圆的圆心为 P，P 必被某个单位格点正方形 $ABCD$ 所盖住．此时，

$$\min\{|PA|,|PB|,|PC|,|PD|\} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}<1.1,$$

所以 A,B,C,D 中必有一个点被圆 P 盖住，即 $r\geqslant 1$. 但 $r<2$，所以 $r=1$. 由例 4，$S_{圆P}\leqslant\pi$，与 $S_{圆P}=\pi\times 1.1^2>\pi$ 矛盾.

例 9 已知格点凸五边形的边长都是整数，求证：其周长为偶数.

证：将平面上的格点二染色，使相邻(距离为 1 的)两个格点异色. 我们证明：对于任何两个满足 $|PQ|$ 为整数的格点 P，Q，则 $|PQ|$ 为偶数等价于 P,Q 同色.

实际上，若线段 PQ 在格线上，则结论显然成立. 若 PQ 不在格线上，则以 PQ 为斜边作一个格点直角三角形 PQR，使两直角边 PR，QR 都与格线平行. 设想从点 P 出发，沿直角边 PR 运动到 R，再沿直角边 RQ 运动到 Q. 显然，P,Q 同(异)色等价于 $|PR|+|RQ|$ 为偶(奇)数. 又 $|PQ|^2=|PR|^2+|QR|^2$，所以 $|PQ|\equiv|PQ|^2\equiv|PR|^2+|QR|^2\equiv|PR|+|QR|\pmod 2$. 所以 P,Q 同色等价于 $|PQ|$ 为偶数.

设想从格点凸五边形 $ABCDE$ 的顶点 A 出发，依次沿其边 AB，BC，CD，DA，AE，EA 运动回到出发点 A，共改变偶数次颜色. 这表明五边形的边中有偶数条边的长为奇数，从而周长为偶数.

5.2 格点与格径中的计数

本节我们给出若干格点与格径中计数的例子.

例 1 在 $n\times n$ 棋盘中，有多少个格点正方形？

解：设 $n\times n$ 棋盘为正方形 $ABCD$. 则棋盘中的格点正方形可分为两类：第一类，其边平行于正方形的边；第二类，其边不平行正方形的边.

先考虑第一类正方形的个数. 设某个第一类正方形的面

积为 k^2，它的一组对边交 AB 边于两点 P,Q，另一组对边交边 AD 于 R,T. 这样，每一个面积为 k^2 的第一类正方形都对应 AB,AD 边上各两个点 P,Q 和 R,T，使 $PQ=RT=k$（图 1）. 反之，合乎上述条件的四点 P,Q,R,T 都唯一确定一个面积为 k^2 的第一类正方形. 注意到 AP 可以取 $0,1,2,\cdots,n-k$ 这 $n-k+1$ 个值，从面 AB 边上的点对 (P,Q) 有 $n-k+1$ 种取法. 同样，AD 边上的点对 (R,T) 有 $n-k+1$ 种取法. 故第一类合乎条件的正方形有 $(n-k+1)^2$ 个.

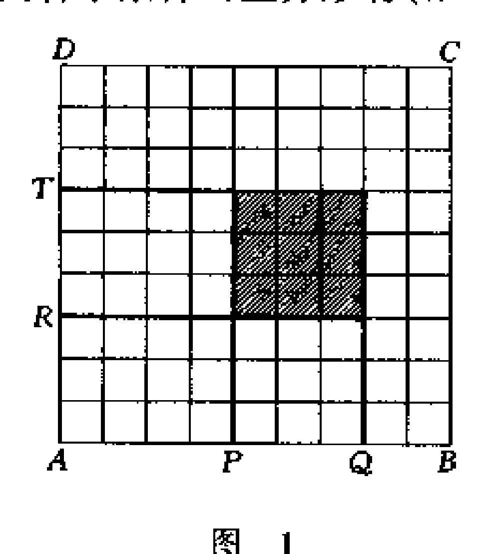


图 1

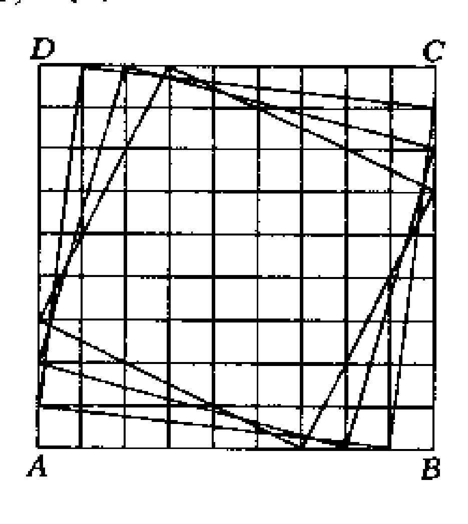


图 2

再考虑第二类正方形的个数. 读者可先思考：如何将第二类正方形化为第一类正方形求解？

对于每一个第二类正方形，它总是某个第一类正方形的内接正方形. 反之，对每一个面积为 k^2 的第一类正方形，它有 $k-1$ 个第二类的内接正方形（图 2）. 又面积为 k^2 的第一类正方形有 $(n-k+1)^2$ 个，故内接于面积为 k^2 的第一类正方形的第二类正方形有 $(k-1)(n-k+1)^2$ 个.

综上所述，所有合乎条件的正方形的个数为

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2+\sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k+1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k[(n+1)^2-2(n+1)k+k^2]$$

$$=(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}.$$

例2 在 $n\times n$ 棋盘中,有多少个其边平行棋盘的对角线的格点长方形(非正方形)?

解:设 $n\times n$ 棋盘为正方形 $ABCD$.我们称合乎条件的长方形为斜长方形.对任何一个斜长方形,它总是某个其边平行格线的正方形的内接长方形.反之,对每一个面积为 k^2 的其边平行格线的正方形,有 a_k 个内接的斜长方形,其中 $a_k=\frac{2k-3-(-1)^k}{2}$.即 k 为奇数时,$a_k=k-1$(图 3);k 为偶数时,$a_k=k-2$(图 4,注意中间的一个斜矩形为正方形).

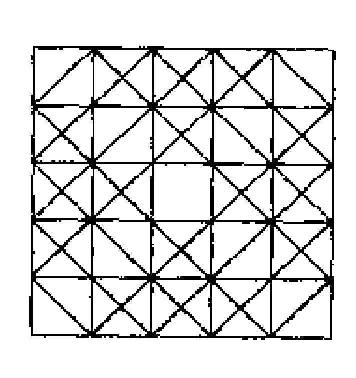


图 3

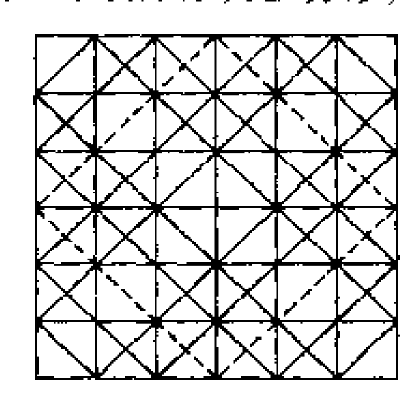


图 4

又面积为 k^2 的其边平行格线的正方形有 $(n-k+1)^2$ 个,于是,所有合乎条件的斜长方形的个数为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{[(2k-3)-(-1)^k](n-k+1)^2}{2}=2C_{n+1}^{4}.$$

其中在求和中用到了 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\frac{(-1)^n-1}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\frac{(2n+1)(-1)^n-1}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=\frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

注意到本题的结果"$2C_{n+1}^4$"非常简洁，能否找到一个对应，通过计算另一类对象的个数使问题直接获解？我们曾作过一些尝试，但没有成功．希望读者能找到简捷的解答．将上述问题推广，便得到如下的问题：

问题 1 在 $n\times n$ 棋盘中，有多少个格点矩形？

此题有相当的难度，它除了上述所求的斜长方形外，还有一些其边不平行棋盘的对角线的斜长方形．考察任意一个这样的矩形 $ABCD$，设此矩形的边 AB，AD 与棋盘的边的夹角分别为 α，β，则 $\alpha+\beta=90°$．又设 AB 的横向射影、纵向射影分别为 s，t，AD 的横向、纵向射影分别为 m，n．由 $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta=1$，得 $ms=nt$．若 $m\neq t$，满足上述条件的 m，n，s，t 便唯一确定一个其边不平行棋盘的边和对角线的矩形．比如$(m,\ n)=(2,4)$，$(s,\ t)=(6,3)$便是一个解(图 5)．显然，用这种方法求出一般问题的结论几乎是不可能的．我们还可以考虑更一般的 $m\times n$ 棋盘中有多少个格点矩形的问题，这些请读者研究．

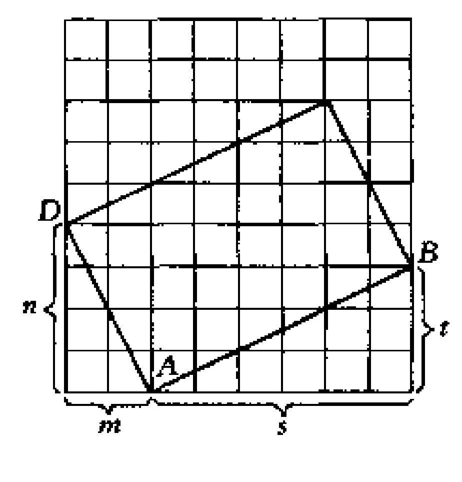


图 5

例 3 $m\times n$ 方格棋盘上放有 r 个格点正方形，但任何两个正方形中，一个不被另一个覆盖．求 r 的最大值．(第 43 届莫斯科数学竞赛题)

解：$r_{\max}=mn$.

首先，一个正方形对应一个该正方形右上方的顶点，再对应棋盘中一个不在左边界线及下边界线上的格点.这样的格点共有 mn 个.其次，上述映射是单射.实际上，若两个正方形 A，B 对应同一个格点 P，不妨设 $S_A>S_B$.那么 A 覆盖了 B，矛盾.所以 $r\leqslant mn$.

最后，mn 个单位正方形显然合乎条件.故 $r_{\max}=mn$.

例 4 从 $m\times n$ 棋盘的左下角顶点沿格径走到右上角顶点，每个格点至多经过一次，设不同的路径数为 $f(m,n)$.求证：$f(m,n)\leqslant 2^{mn}$，并讨论等号何时成立.

证：首先，一个路径对应于将棋盘划分为“可空”的两块，即将 mn 个格分为“可空”的两组.

由于分组中，每个格可属于其中任何一个组，有两种选择，从而分组的方法数为 2^{mn}.由于上述映射是单射，即不同的路径对应不同的分组.所以，$f(m,n)\leqslant 2^{mn}$.

最后，当 $\min\{m,n\}=1$ 时(图 6)，对任何一个分组都对应一条路径，从而映射为满射.此时 $f(m,n)=2^{mn}$.

当 $\min\{m,n\}>1$ 时，$f(m,n)<2^{mn}$.实际上，考察某个 2×2 的正方形，若将它的两个对角的格放在同一组(图 7)，则不存在相应的路径.故等号当且仅当 $\min\{m,n\}=1$ 时成立.

例 5 将平面上的每一个格点染红、蓝二色之一，求证：存在无数多个红色三角形或无数多个蓝色三角形.

证：我们只须证明某个小块中存在同色三角形即可.因为每个小块中有一个同色三角形，便可得到无数个同色三角形.但只有二色，必有一种颜色的三角形有无数个.

考察 4×4 棋盘.如图 8，在此棋盘中取定 A,B,C,D,E 这 5 个点，则必有 3 个点同色.由于此 5 点中任何 3 个点不共

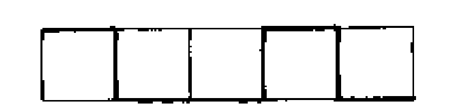


图 6

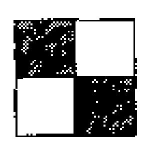


图 7

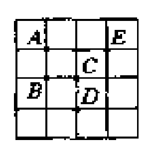


图 8

线，必有一个同色三角形．命题获证．

例 6 将直角坐标系中每个格点染 n 色之一，求证：存在其边不平行坐标轴且各顶点同色的格点矩形．

证：作 $n+1$ 条直线 $a_i(i=0,1,2,\cdots,2n)$：$y=x+2i$，及无数条直线 b_j：$y=-x+2j(j\in Z)$．每一条直线 b_j 被 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 截得 $n+1$ 个格点，从而 b_j 上至少有两个格点同色．对于 b_j 上的 $n+1$ 个格点，只有 n^{n+1} 种不同的染色方式，从而必有两条直线 b_j,b_k，它们的格点的染色方式相同，这两条直线上各有两个同色格点构成矩形，证毕．

例 7 用 $S(n)$ 表示从 $(c,0)$ 到 (n,n) 的不同路径数，其中路径从整点 (a,b) 只能走到 $(a+1,b)$，$(a,b+1)$，$(a+1,b+1)$ 之一，且不通过直线 $y=x$ 上方的点．例如 $S(2)=6$，$S(3)=22$．求证：$3|S(2n)(n\in N)$．

解：从 $O(0,0)$ 到 $A(n,n)$ 的路径中，至少有两个顶点在直线 $y=x$ 上（因为 O,A 在 $y=x$ 上）．设其中最靠近 A 的一个点为 $A_k(k,k)(0\leqslant k<n)$．考察所有这样的路径数 $T(k)$．

显然，$T(0)$ 是从 $P(1,0)$ 到 $Q(n,n-1)$ 的路径且不通过 PQ 上方的点的路径数，从而 $T(0)=S(n-1)$．对于 $1\leqslant k\leqslant n-2$，$T(k)$ 是从 $(0,0)$ 到 (k,k) 的类似的路径数与 $(k+1,k)$ 到 $(n,n-1)$ 的类似的路径数之积，即 $T(k)=S(k)S(n-k-1)$．对于 $T(n-1)$，它是 $(0,0)$ 到 $(n-1,n-1)$ 的路径数与 $(n-1,n-1)$ 到 (n,n) 的路径数之积，所以 $T(n-1)=2S(n-1)$．

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)=3S(n-1)+\sum_{i=2}^{n-2}S(i)S(n-1-i).$$

下面对 n 归纳证明:$3|S(2n)$.

首先 $3|S(2)$.设 $3|S(k)$,其中 k 是所有小于 $2n$ 的正偶数.考察 $S(2n)$:

$$S(2n)=3S(2n-1)+\sum_{i=1}^{2n-2}S(i)S(2n-1-i).$$

若 i 为偶数,则 $1\leqslant i\leqslant 2n-2<2n$,所以,$3|S(i)$;若 i 为奇数,则 $1\leqslant 2n-1-i<2n$,所以 $3|S(2n-1-i)$.从而对一切自然数 $i(1\leqslant i\leqslant 2n-2)$,有 $3|S(i)S(2n-1-i)$,从而,$3|S(2n)$.

例 8 设 $T(n)$表示坐标平面上$[0,n]\times[0,n]$内各边都通过格点且斜率为 0,∞或 ±1 的三角形的个数,求 $T(n)$.

解:将 $0,\infty,\pm1$ 分为两组:$\{0,\infty\}$,$\{-1,1\}$.由于三角形三边的斜率只取以上 4 个值,而且不可能有两边平行,从而三边的三个斜率必包含其中一组数中的两个,所以这种三角形必为直角三角形.进一步可知,三角形的锐角只能是直线 $y=\pm x$与坐标轴的夹角,从而三角形为等腰三角形.于是,所有合乎条件的三角形可以分为两类:第一类,斜边的斜率为 ±1;第二类,斜边的斜率为 0 或∞.

对于第一类三角形,由对称性,只须计算以$\{(a,b),(a+k,b),(a,b+k)\}$为顶点的三角形的个数 $X(n,k)$.对于第二类三角形,由对称性,只须计算以$\{(a,b),(a+k,b),(a+\frac{k}{2},b+\frac{k}{2})\}$为顶点的三角形的个数 $Y(n,k)$.

注意到上述三角形中都有一条边的斜率为 0,从而另外两条边的斜率只能为 ±1 或∞.又三角形的边通过格点,从而斜率为 0 的边的两个端点必为格点.这样,a,b,k 都是整数.

对于以$\{(a,b),(a+k,b),(a,b+k)\}$为顶点的三角形，必有$0\leqslant a\leqslant n-k, 0\leqslant b\leqslant n-k$，于是$X(n,k)=(n-k+1)^2$；

对于以$\left\{(a,b),(a+k,b),\left(a+\frac{k}{2},b+\frac{k}{2}\right)\right\}$为顶点的三角形，必有$0\leqslant a\leqslant n-k, 0\leqslant b\leqslant\left[n-\frac{k}{2}\right]$，于是$X(n,k)=(n-k+1)\left(\left[n-\frac{k}{2}\right]+1\right)$，所以，

$$\frac{T(n)}{4}=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(\left[n-\frac{k}{2}\right]+1\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{j=1}^{[n/2]}(n-2j+1)(n-j+1)$$

$$+\sum_{j=1}^{[n/2]}(n-2j+2)(n-j+1)$$

(其中将前一个“和”中的$(n-k+1)$看作i，将后一个“和”中的k分$k=2j$和$k=2j-1$拆开)

$$=\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{j=1}^{[n/2]}(n-j+1)(2n-4j+3),$$

直接展开求和，得

$$T(n)=n(n+1)(3n+1)+\left[\frac{n^2}{2}\right].$$

最后，我们给出若干个利用格径计数的其他例子.

例9 $2n$个人排队买戏票，每人限购一张，票价为5元.有n个人持10元币，n个人持5元币，排成一列依次购票.售票员未带零钱，问有多少种不出现因无零钱而等待找补的现象的排队方法？

解：将持5元币和持10元币的人分别记为$1,-1$.这样问题等价于由n个1和n个-1排成一个数列，使其部分和都非负.用S_k表示该数列的前k项的和，则问题又等价于所有点(k,S_k)都在x轴上或上方.在直角坐标系中标出这些点

(k,S_k),并将点(k,S_k)与点$(k+1,S_{k+1})$用线段连接($k=0,1,2,\cdots,2n-1$,其中 $S_0=0$),这样便得到一条连接 $O(0,0)$与$A(2n,S_{2n}=0)$的折线.此折线不经过 x 轴下方的任何点.反之,一条连接 $O(0,0)$与 $A(2n,0)$的折线,若它不经过 x 轴下方的任何点,令各结点的纵坐标为 S_k,记 $X_k=S_k-S_{k-1}$,则$x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$是合乎条件的数列.于是,合乎条件的排队方法等价于上述折线的条数.

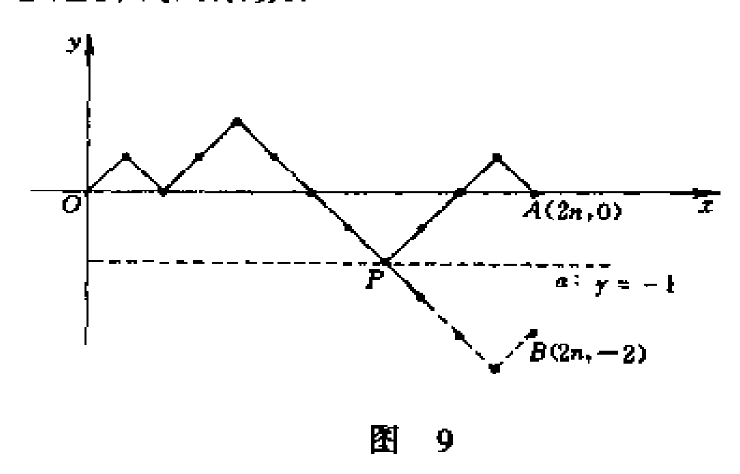


图 9

从正面计算折线的条数是比较困难的,我们期望从所有连接 O,A 的折线中去掉不合乎条件的折线.由于连接 O,A 的折线共有 $2n$ 段,每一段或者上升,或者下降.注意到折线的两个端点都在 x 轴上,从而上升的段与下降的段条数相等.即有 n 段是上升的,有 n 段是下降的.在 $2n$ 段中选择 n 段为上升的有 C_{2n}^n种方法.这就是所有折线的总数.下面考虑其中不合乎条件的折线.每一条不合乎条件的折线,必与直线 $a:y=-1$ 有一个公共点,设其横坐标最小的一个交点为 P(找最左边的交点是为了使下面的对应是单值的).将折线位于点 P 右边的部分关于 a 直线对称过去(如图 9 中的虚线部分),其中 $A(2n,0)$的对称点为 $B(2n,-2)$.这样,每一条不合乎条件的折线都对应一条连接 O,P,B 三点的折线.反之,

对于任何一条连接 O,B 的折线，它必与直线 $y=-1$ 有交点. 设其中横坐标最小的一个交点为 P，将此折线位于 P 右边的部分关于直线 $y=-1$ 对称过去，便得到一条连接 O,A 的不合乎条件的折线. 于是，这种对应为一一对应. 我们来计算连接 O,B 的折线的条数. 由于 B 的纵坐标为 -2，在连接 O,B 的折线中共有 $2n$ 段，设其中有 p 段是上升的，q 段是下降的，则 $p+q=2n$，$p-q=-2$. 从而 $p=n-1$，$q=n+1$. 于是，这样的折线的条数为 C_{2n}^{n-1}.

综上所述，合乎条件的折线的条数为 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\dfrac{C_{2n}^{n-1}}{n}$.

例 10 （贝特朗问题，Betrand，法国数学家）甲乙两人参加竞选，结果是甲得 n 票，乙得 m 票（$n>m$）. 试问：唱票中甲累计的票数始终超过乙累计的票数的方法有多少种？

解：合乎条件的唱票方法数为

$$C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m}^{n}-2C_{n+m-1}^{n}$$

$$=\left(1-\frac{m}{n}\right)C_{n+m-1}^{m}.$$

唱甲当选，则记为 1，若唱乙当选，则记为 -1. 这样问题等价于由 n 个 1 和 m 个 -1 组成的一个数列，使其部分和都为正. 用 S_k 表示此数列的前 k 项的和，则问题又等价于所有点 (k,S_k) 都在 x 轴的上方. 在直角坐标系中标出这些点 (k,S_k)，并将点 (k,S_k) 与点 $(k+1,S_{k+1})$ 用线段连接（$k=0,1,2,\cdots,m+n$，其中 $S_0=0$），这样便得到一条连接 $O(0,0)$ 与 $A(m+n,S_{m+n}=m-n)$ 的折线. 此折线不经过 x 轴及其下方的任何点. 反之，一条连接 $O(0,0)$ 与 $A(m+n,m-n)$ 的折线. 若它不经过 x 轴及下方的任何点，令各结点的纵坐标为 S_k，记 $x_k=S_k-S_{k-1}$，则 $x_1,x_2,\cdots,x_{m+n}$ 是合乎条件的数列. 下面计

算合乎条件的折线的条数.

同样,我们期望从所有连接 O,A 的折线中去掉不合乎条件的折线.由于连接 O,A 的折线共有 $m+n$ 段,每一段或者上升,或者下降.由条件可知,有 n 段是上升的,有 m 段是下降的.在 $m+n$ 段中选择 n 段为上升的有 C_{m+n}^{n} 种方法.这就是所有折线的总数.

下面考虑其中不合乎条件的折线(简称坏折线)的条数.我们用三种不同的方法求之.

解法 1:对每一条坏折线,它必与 x 轴有一个公共点,设其横坐标最小的一个交点为 P.将坏折线位于点 P 右边的部分关于 x 轴对称过去(如图 11 中的虚线部分),记点 $A(m+n,n-m)$ 的对称点为 $B(m+n,n-m)$.这样,得到一条连接 O,B 的折线.反之,对于一条连接 O,B 的折线,它必与 x 轴有交点,设其中横坐标最小的一个交点为 P,将此折线位于点 P 右边的部分关于 x 轴对称过去,便得到一条连接 O,A 的折线.但此折线不一定是坏的.比如,P 为原点 O 时,对称后的折线是合乎条件的折线(如图 10).于是,连接 O,B 的折线并不能与连接 O,A 的坏折线建立一一对应.因此,我们应对坏折线进行分类,以保证某种折线对称后必是坏折线.

坏折线可以分为如下两类:(1)坏折线过点 $S(1,1)$;(2)

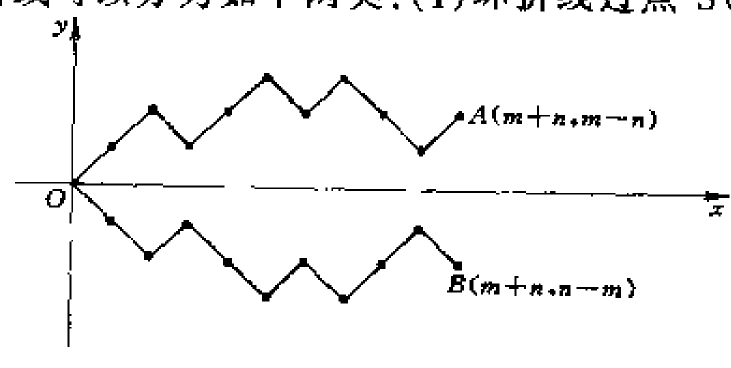


图 10

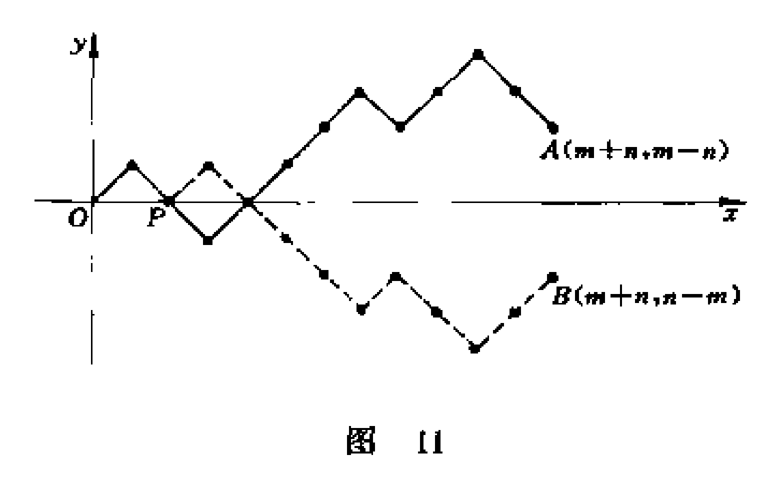


图 11

坏折线过点 $T(1,-1)$.

显然,当折线过点 T 时,折线一定是坏的,这类折线的后 $n+m-1$ 段中有 n 段上升,有 $m-1$ 段下降,从而有 C_{n+m-1}^{n} 条.现在来计算过 S 的坏折线的条数.每条过 S 的坏折线必与 x 轴相交,设它与 x 轴的横坐标最小的交点为 P.将此折线位于 P 左边的部分关于 x 轴对称过去,便得到过 T 的坏折线.反之亦然.于是过 S 的坏折线的条数亦为 C_{n+m-1}^{n}.由此可知,合乎条件的折线的条数为

$$C_{n+m}^{n}-2C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n+m-1}^{n}=\left(1-\frac{m}{n}\right)C_{n+m-1}^{m}.$$

解法 2:过 S 的坏折线的条数可以这样计算.设它第一次与 x 轴相交的交点为 P,将折线位于 P 右边的部分关于 x 轴对称过去,得到连接 $O(0,0)$, $B(n+m,n-m)$ 的折线(图 11).反之亦然.设这样的折线有 x 段上升,y 段下降,则 $x+y=m+n-1$, $x-y=m-n-1$,所以,$x=n$, $y=m-1$.从而过 S 的坏折线的条数为 C_{n+m-1}^{n}.

解法 3:我们只须计算过点 S 的所有折线总数.这样的折线有 $n-1$ 段上升,有 m 段下降,从而过 S 的所有折线的条数为 C_{n+m-1}^{n-1}.利用解法 2,求得过 S 的坏折线有 C_{n+m-1}^{n}条,故

所有好折线的条数为

$$C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n+m-1}^{n}=\left(1-\frac{m}{n}\right)C_{n+m-1}^{m}.$$

习 题 五

1. 求证:格点锐角三角形的面积大于$\frac{1}{2}$.(莫斯科数学竞赛题)

2. 设 $M=\{(41x+2y,59x+15y)\mid x,y\in Z\}$.求证:一切以原点为中心,面积为 1990 的平行四边形至少盖住 M 中的两个格点.

3. 设格点凸四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 P,若$\angle ADC+\angle BCD<180°$,求证:$\triangle PCD$ 必盖住一个异于 C,D 的格点.

4. 求证:存在 n 个无三点共线的格点,其中任意多个格点的重心仍为格点.

5. 将直角坐标系中每个格点染 n 色之一,求证:存在其边不平行坐标轴且各顶点同色的格点矩形.

6. 设点 P 的坐标为(x,y),若 x,y 不全为整数,但 $2x,2y$ 全为整数,则称 P 为半格点.求证:若 P 是格点或半格点,则任何格点关于点 P 的对称点也是格点.

7. 求证:若平行四边形有 3 个顶点为格点,则其第四顶点也是格点.

8. 设 A 是关于坐标原点对称的一个凸图形,且 A 的面积大于 4,那么 A 中必有除原点 O 以外的格点.(数论几何基本定理)

9. 求证:不存在格点正三角形,正五边形.

10. 求证:存在一个同心圆的集合 P,使得

(1) 每一个格点都在 P 中的一个圆上;

(2) P 中的每一个圆上有且只有一个格点.

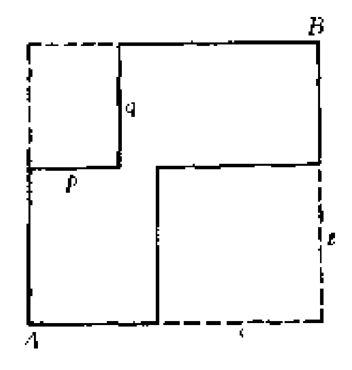
11. 边长都是整数的格点三角形称为整三角形.一个等腰的整三角形可以由两个全等的整直角三角形拼成.试问是否还有其他方式构成等腰整三角形?

12. 对任何整数 $m>12$,在无限棋盘上,都存在这样一个面积大于

m 的格点矩形，此矩形中不存在任何面积为 m 的格点矩形.

13. 求 $m\times n$ 棋盘中格点矩形的个数 $J(m,n)$.

14. 如图，在 $m\times n$ 棋盘的左上角挖去一个 $p\times q$ 的棋盘，从右下角挖去一个 $s\times t$ 的棋盘，其中 $p+s\leqslant m, q+t=n$. 从 $m\times n$ 棋盘的左下端顶点 A 沿格线走到右上端的顶点 B，其最短的路线的长度为 $m+n$. 问这样的最短路线有多少条？



（第 14 题图）

15. 想象一个点 A 从(0,0)出发沿着格径走 n 步，每步移动单位长，但 A 始终不经过下半平面内的任何点，求不同的路径数 $A(n)$. 比如，$A(1)=3, A(2)=10$.

16. 点 A 在无限大的棋盘上沿格线运动，从某格点出发运动长为 $2n$ 的路线又回到原来的位置，问有多少种不同的路线？

17. 设点 P 在棋盘上运动，每一步都是向右上或右下走一个单位正方形的对角线. 求 P 从原点 $O(0,0)$ 运动到 $M(2n,0)$ 且不经过 x 轴下方任何点的路径的条数.

18. 戏院票房有 $2n$ 个人排队购买 5 元一张的戏票，其中 n 个人各持一张 5 元币，n 个人各持一张 10 元币，每个人买一张票. 问购票过程中不出现没有零钱而等待找补的概率是多少？

19. 甲乙两人在无穷大的棋盘上作游戏. 自甲开始，他们依次在棋盘上标出格点. 他们每标出一个格点，都应使所有已标出的格点构成一个凸多边形的顶点. 如果轮到谁不能再标出新的格点，则判谁输. 问：谁有必胜策略？

20. 以格点 P 为圆心，以 R 为半径画圆. 求证：若此圆周上恰有 1988 个格点，则 R 或 $\sqrt{2}R$ 为整数.

21. 已知一个格点直角三角形的三边长都是整数. 求证：此三角形的内切圆的圆心也是格点.

22. 在 3×11 棋盘中，从左下角的顶点出发，沿格径走过所有格点恰一次又回到出发点（其中第一步必须横向走）. 求所有的路径数.

习题解答概要

习题一

3. 充分性是显然的．若棋盘被 $4-T$ 形完全覆盖，则 $4 \mid n^2$，所以 n 为偶数．对棋盘相间 2－染色，则棋盘中黑格白格各有 $n^2/2$ 个，它是偶数．又每个 $4-T$ 形覆盖奇数黑格和奇数个白格，从而 $4-T$ 形总数为偶数，所以 $8 \mid n^2$，即 $4 \mid n$．

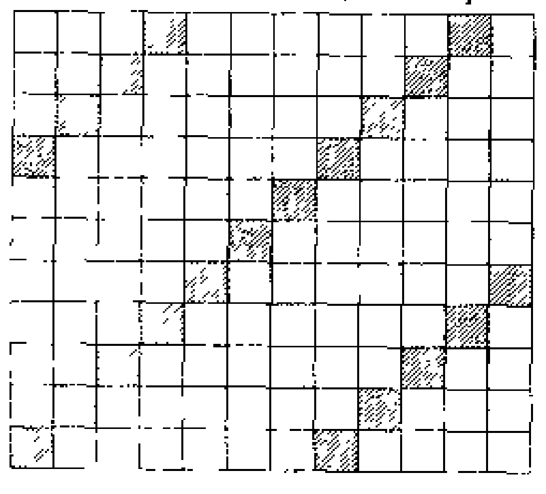
11. 将棋盘 3－染色，使第一行方格的颜色依次为 1,2,3,1,2,3,1,2，而每列方格的颜色都构成一个公差为 1 的等差数列（大于 3 的数按模 3 理解）．这样，每个 1×3 矩形覆盖的方格的颜色分别为 1,2,3．于是，若残缺棋盘可以用 21 个 1×3 矩形覆盖，则 1,2,3 色格各有 21 个，但其中 2 色格有 22 个，矛盾．

12. 将棋盘的方格黑白相间染色，则一个 $4-T$ 形盖住 3 黑一白或 3 白一黑，一个 2×2 正方形盖住 2 黑 2 白，注意到共有 15（奇数）个 $4-T$ 形，所以，这些覆盖形共盖住奇数个黑格和奇数个白格，矛盾．

13. 先证明如下结论：当 $k\geq18$ 时，存在非负整数 r,s，使 $k=3r+10s$．事实上，若 $k=3t$，结论显然成立．若 $k=3t+1(t>5)$，则 $k=3(t-3)+10$，结论成立．若 $k=3t+2(t>5)$，则 $k=3(t-6)+2\times10$，结论成立．对原题，设 $m=3p+10q$，$n=3r+10s$．则 $m\times n$ 棋盘都分割成 pr 个 3×3，qs 个 10×10 及 $ps+qr$ 个 3×10 矩形．

14. 1×1 正方形至少要 1 个．

15. 当 $k=20$ 时，将 11×12 棋盘划分为一个 7×12 矩形和一个 4×12 矩形，对 7×12 矩形，用 12 个 1×7 矩形覆盖，对 4×12 矩形，用 8 个 1×6 矩形覆盖．当 $k=19$ 时，设有 x 个 1×6 矩形，$19-x$ 个 1×7 矩形，则 $6x+7(19-x)=132$，解得 x



（第 15 题图）

=1. 将 11×12 棋盘中 20 个格染红色(图中的阴影方格). 显然, 每个 1×7 矩形恰覆盖一个红格, 从而那个 1×6 矩形要覆盖两个红格, 这不可能.

16. 当且仅当去掉格 $a_{3,3}, a_{3,6}, a_{6,3}, a_{6,6}$ 中的一个格时, $8\times8-1$ 的残缺棋盘可用 1×3 的矩形覆盖. 实际上, 将棋盘的第一行格从左至右依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 然后对每一列进行编号, 使每一列数是公差为 1 的等差数列. 最后将表中的数取模 3 的最小正剩余. 此时, 任何一个 1×3 矩形覆盖的格中恰好有一个 1, 一个 2, 一个 3. 但表中有 21 个 1, 21 个 3, 22 个 2. 于是只能去掉编号为 2 的方格. 但不能去掉 $a_{1,2}$. 这是因为去掉 $a_{1,2}$ 与去掉 $a_{1,7}$ 是等价的. 由此可知, 若 $a_{i,j}$ 的编号为 2 且 $a_{i,j}$ 是可去掉的, 则 $a_{j,i}$ 的编号也应是 2. 最后, 当去掉格 $a_{3,3}$ 时, 可将 8×8 的棋盘划分为一个 5×5 矩形, 一个 5×3 矩形和一个 3×5 矩形. 其中的 5×5 矩形去掉中心一格后可用 1×3 矩形完全覆盖.

17. 最小值为 9. 一方面, 可在 8×8 棋盘中放入 9 个 2×2 正方形, 使任何两个相邻正方形相间一个空格. 此覆盖是饱和的. 另一方面, 若棋盘中只放了 8 个 2×2 正方形, 注意到每个 2×2 正方形最多与上述放置的 9 个 2×2 正方形中的一个相交, 于是至少还有一个正方形所在的位置可新放入一个 2×2 正方形.

20. 在 8×8 棋盘的 $3-L$ 形饱和覆盖 P 中, 任何一个 2×2 矩形至少有两个格被覆盖, 所以棋盘至少有 $16\times2=32$ 个格被覆盖, 所以至少需要 $[32/3]+1=11$ 个 $3-L$ 形. 另外, 8×8 棋盘可用 11 个 $3-L$ 形饱和覆盖, 所以 $|P|$ 的最小值为 11.

21. 将 $4-T$ 形中同时与它的 3 个方格相邻(有公共边)的方格叫做它的中心格. 在棋盘的 $4-T$ 形覆盖中, 若棋盘的某个方格与 $4-T$ 形的一个方格相邻, 则称此格为 $4-T$ 形的一个邻格. 对任何两个 $4-T$ 形, 若其中任何一个 $4-T$ 形的中心格不是另一个 $4-T$ 形的格及邻格, 则它们没有公共覆盖的格. 注意到每个 $4-T$ 形有 4 个格和 8 个邻格, 因此, 每个 $4-T$ 形至多使 12 个格不能为另一个 $4-T$ 形的中心格, 这样, 覆盖中的 800 个 $4-T$ 形至多使 $800\times12=9600$ 个格不能为其他 $4-T$ 形的中心格. 100×100 棋盘共有 98^2 个非边缘的格, 于是至少有 $98^2-9600=4$ 个格可以为另外的 $4-T$ 形的中心格而不与棋盘中原有的 $4-T$ 形重叠, 即至少还可放下一个 $4-T$ 形.

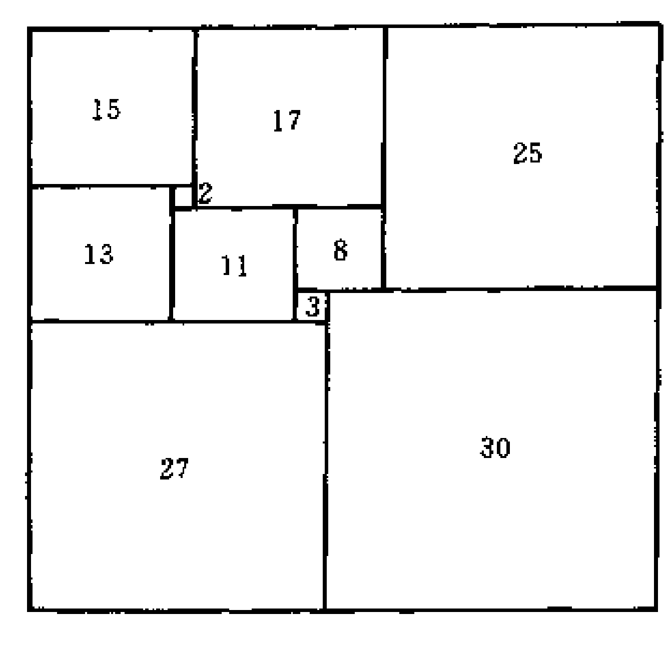
22. 对 n 用数学归纳法.

23. 至少要 9 个圆. 注意一个圆可以使 2×3 矩形的每个方格至少覆盖一个点.

26. 不存在.

27. 55×57 棋盘的一个 4-异正方形覆盖如下图所示, 图中的数表示相应正

方形的边长.



（第 27 题图）

习题二

1. $MK(8,8)=12$,其中马所在的位置是:(2,6),(3,2),(3,3),(3,5),(3,6),(4,3)及这些格关于中心对称的 6 个格.

3. $JK(n,n)=n$.

4. $JR(n,n)=n$.

5. $XR(n,n)=2n-2$.

7. $m\times n$ 棋盘中放 k 只车的方法有 $C_m^kC_n^kk!$ 种.

8. $m\times n$ 棋盘中放车的方法有 $C_m^8C_n^8 8!\ 8!\ /5!\ 3!$ 种.

9. r 的最小值为 9.

10. 存在.

11. 不能.考察 1990×1990 棋盘的任何一种合乎法则的染色,将棋盘中的黑格标数 1,白格标数 -1,并把棋盘分成 4 个 995×995 的小棋盘 A_1,A_2,A_3,A_4.每个这样的小棋盘都包含有奇数个格,其标数的和不为 0.由对称性,$S(A_1)=-S(A_3)$,$S(A_2)=-S(A_4)$.若 $S(A_1)$,$S(A_2)$同号,不妨设 $S(A_1)>0$,$S(A_2)>0$,则由 A_1,A_2 构成的 995×1990 矩形中至少有一行的和不为 0,即此行中黑格数与白格数不相等.若 $S(A_1)$,$S(A_2)$异号,不妨设 $S(A_1)>0$,$S(A_2)<0$,则 $S(A_4)>$

0,于是由 A_1,A_4 构成的 1990×995 矩形中至少有一列的和不为 0,即此列中黑格数与白格数不相等.

12. 由右图可知,当 $r>6$ 时,存在一种放棋子的方法,无论划去怎样的两行两列,都不能包含所有的 r 只棋了.所以,$r\leqslant 6$.容易证明,当 $r=6$ 时,总可以划去两行两列,使它们包含所有的 r 只棋子.故 $r_{\max}=6$.



(第 12 题图)

13. 能.奇数行排:$\cdots,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,\cdots$;偶数行对应位置排:$\cdots,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,\cdots$.

14. (1)是可能的;(2)是不可能的.对(1),可将一个 3×5 矩形的边框和一个 3×6 矩形的边框染红色,而使这两个矩形有一个公共格.

15. 对棋盘的方格 4-染色,使对任何 i,j,格 $a_{i,j}$ 与格 $a_{i+2,j}$ 及 $a_{i,j+2}$ 同色,且任何两个有公共顶点的方格不同色.由抽屉原理,棋盘中的 r 只棋中,至少有 $[r/4]$ 只棋所在的格同色,从而这 $[r/4]$ 只棋为所求.

21. 33 只.每个 1×3 矩形中恰有一只棋.

22. n 为奇数时,不存在选法;当 n 为偶数时,共有 $\left[\frac{n!}{(n/2)!}\right]^4$ 种选法.对每一种选法,令其对应 $1,2,\cdots,2n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$.如果格(i,j)被选取,则令 $a_i=j$.显然,所有满足 $i\equiv j \pmod 2$ 的格(i,j)同色,所有满足 $i\not\equiv j \pmod 2$ 的格(i,j)同为另一种颜色.注意到排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 已保证各行各列中各取一个格,现在只要求排列对应的格中共有 n 个白格,n 个黑格.这等价于恰有 n 个 i 使 $i\not\equiv a_i \pmod 2$.现在来求这样的排列的个数.推广:考察 $1,2,\cdots,m$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$,其中恰有 k 个 i 使 $i\not\equiv a_i \pmod 2$.设这 k 个 i 为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$.其中有 s 个奇数,t 个偶数($s+t=k$),那么,$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik}$ 中有 s 个偶数,t 个奇数.由于 $1,2,\cdots,m$ 中与 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中奇数的个数相等(只改变了顺序),而 $i\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 时,$i\equiv j \pmod 2$,于是,$i_1,i_2,\cdots,i_k$ 与 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik}$ 中奇数的个数分别相等,所以 $s=t$,从而 $k=2s$.(ⅰ)当 k 为奇数时,与 $k=2s$ 矛盾,从而不存在合乎条件的排法;(ⅱ)当 k 为偶数时,$1,2,\cdots,m$ 中共有 $f(m/2)$($f(x)$是不小于 x 的最小整数)个奇数,$[m/2]$ 个偶数,从 $f(m/2)$ 个奇数位中选取 $k/2$ 个位置排偶数,其他奇数位排奇数;在 $[m/2]$ 个偶数位中选取 $k/2$ 个位置排奇数,其他偶数位排偶数,再将 $f(m/2)$ 个奇数,$[m/2]$ 个偶数分别全排列,共有 $F(m,k)=C_{k/2}^{f(m/2)}C_{k/2}^{[m/2]}f(m/2)!\,[m/2]!$ 种排法.令 $m=2n,k=n$,即得上述结论.

23. n 的最大值为 7.所放 7 只棋的位置为:(1,7),(2,4),(3,2),(4,6),(5,

3),(6,5),(7,1).

24. n 的最大值为 48.除去两条主对角线穿过的格外,其他每个格都放一只棋.

25. n 为一切不整除 3 的自然数.

26. 当 $3 \mid mn$ 时,最少剩 2 只.此外,最少剩一只.

27. n 的最大值为 50.

28. 当 $r=97$ 时,移动不能实现.

习题三

1. 第 j 列中的红色格构成了 $C_{a(j)}^2$ 个红格对,每一个红色对对应棋盘的一个二行对,于是,各列的红格共对应 $C_{a(1)}^2 + C_{a(2)}^2 + \cdots + C_{a(n)}^2$ 个棋盘的二行对,但棋盘只有 m 行,又 $C_{a(1)}^2 + C_{a(2)}^2 + \cdots + C_{a(n)}^2 > C_m^2$,必有两个不同的红格对对应棋盘的同一个二行对,这两个红格对构成红色矩形.

2. 先证明如下的结论:设 $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a_i 为非负整数,若 $a = pn + q(q < n)$,则 $C_{a(1)}^2 + C_{a(2)}^2 + \cdots + C_{a(n)}^2 > qC_{p+1}^2 + (n-q)C_p^2$.

3. 一些可能的推广是:

(1) $m \times n$ 棋盘 a-染色($a < m$),若 $C_m^{[(m-1)/n]+1} \leqslant \left[\frac{n-1}{a}\right]$,则必有同色矩形.

(2) $n \times [(n-1)C_n^2 + 1]$棋盘 $n-1$ 染色,必有同色矩形.

(3) $n^s \times (n+1)$棋盘 n 染色,必有同色矩形.

4. 不妨设 $k \leqslant t$,固定一种颜色,设为红色.每行共 k 个红格,构成 C_k^2 个红格对,nt 行共有 ntC_k^2 个红格对.由于没有同色矩形,这 ntC_k^2 个红色对对应不同的二列对,于是 $ntC_k^2 \leqslant C_{kn}{}^2$,解得

$$k \leqslant t \leqslant \frac{kn-1}{k-1} = n + \frac{n-1}{k-1}. \qquad ①$$

若 $k > n$,由①,有 $k \leqslant n + \frac{n-1}{k-1} < n+1$.又 k,n 为自然数,所以 $k \leqslant n$,矛盾.所以 $k \leqslant n$.再由①,得 $t \leqslant n + \frac{n-1}{k-1}$.所以 $kt \leqslant kn + \frac{kn-k}{k-1}$.

注意到 $f(k) = kn + \frac{kn-k}{k-1}$是增函数,又 $k \leqslant n$,所以 $kt \leqslant f(k) \leqslant f(n) = n^2 + \frac{n(n-1)}{n-1} = n(n+1)$.

5. n 的最大值为9.设有 n 个考生,易知每个考生的答卷都是一个长为4的序列,此序列由 A,B,C 三个字母组成.从而本题等价于对 $n\times4$ 方格棋盘的格3-染色,使"任何三行都有某列的3个格两两异色".现在,考虑"任何三行都有某列的3个格两两异色"的反面:存在三行,这三行的所有列的3个格都只有两色.我们用反证法找每列只有两色的那些列.通过尝试,发现 $n<10$.否则,取其中任意10行得到 10×4 方格表 M,考察 M 的第一列格,必有一种颜色至多出现3次.于是,至少有7行,这7行的首列只有两色.考察这7行的第二列,必有一种颜色至多出现2次,从而在上述7行中至少有5行,这5行的首列,第二列都只有两色.再考察这5行的第三列,必有一颜色至多出现1次,从而在上述5行中至少有4行,这4行的首列,第二列,第三列都只有两色.再考察这4行的最后一列,必有一颜色至多出现1次,从而在上述4行中至少有3行,这3行的每一列都只有两色.设这3行为 A_1,A_2,A_3,则 A_1,A_2,A_3 的任何一列都有两个格同色,矛盾.另一方面,不难知道,$n=9$ 是可能的,故 n 的最大值为9.

6. 结论是肯定的.

在二色 $(4n-3)\times(4n-3)$ 棋盘中,至少有 $\frac{(4n-3)^2+1}{2}$ 个方格同色,设为红色,令 $X=\{1,2,\cdots,4n-3\}$ 为 $4n-3$ 个列的序号的集合,令 A_i 为第 i 行所有红格所在列的序号的集合,则 $\sum|A_i|\geqslant\frac{(4n-3)^2+1}{2}$.

不妨设 $\sum|A_i|=\frac{(4n-3)^2+1}{2}$ (否则去掉棋盘中若干个格),我们只须证明:存在 i,j,使 $|A_i\cap A_j|\geqslant n$.

设第 i 行有 m_i 个红格,则 $\sum m_i=\sum|A_i|=\frac{(4n-3)^2+1}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum|A_i\cap A_j|&=\sum C_{m_i}^2=\frac{\sum m_i^2-\sum m_i}{2}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(\sum m_i)^2}{4n-3}-\sum m_i\right]\\&=(\sum m_i)\cdot\frac{\sum m_i-(4n-3)}{2(4n-3)}\\&=\frac{1}{2(4n-3)}\cdot\frac{[(4n-3)^2+1]}{2}\cdot\frac{[(4n-3)^2+1-2(4n-3)]}{2}\\&>\frac{1}{2(4n-3)}\cdot\frac{(4n-3)^2}{2}\cdot\frac{(4n-4)^2}{2}\\&=\frac{(4n-3)(4n-4)(n-1)}{2}\\&=(n-1)C_{4n-3}^2.\end{aligned}$$

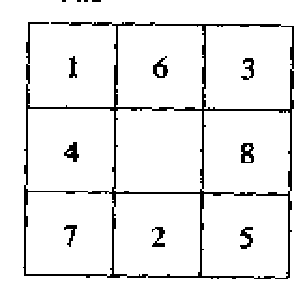
所以,存在 i,j,使 $|A_i\cap A_j|>n-1$,即 $|A_i\cap A_j|\geqslant n$.

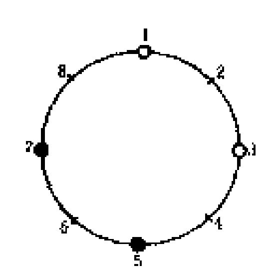
7. $r_{max}=m+n-2$.一方面,将第一行和第一列的所有格(公共的一个格除外)染红色,有 $r=m+n-2$.另一方面,对任何合乎条件的染色方法,必有 $r\leqslant m+n-2$.实际上,不妨设 $m\leqslant n$,对 m 用数学归纳法.当 $m=2$ 时,若 $r>m+n-2=n$,则 $r\geqslant n+1\geqslant 3$.但棋盘只有 n 列,所以必有一列有两个红格,此两个红格与另外任何一个红格构成直角三角形,矛盾.设结论对小于 m 的自然数成立,考察 $m\times n$ 棋盘($m>2$).若 $r>m+n-2$,则 $r\geqslant m+n-1\geqslant n+1$.但棋盘只有 n 列,所以必有一列有两个红格,此两个红格所在的行不能再有其他的红格.否则此两个红格与另外一个红格构成直角三角形,矛盾.去掉其中一个红格所在的行,得到$(m-1)\times n$ 棋盘,其中的红格个数 $r'=r-1\geqslant m+n-2$.由归纳假设,棋盘中含有红色直角三角形.矛盾.

11. $r(m,n)=mn$.

19. 最多有 8 个偏红的行和列.染色方法是将左下角 4×4 子棋盘中每个方格染红色,再将(1,7),(2,6),(3,5)三格染红色.

20. 不可能.





(第 22 题图)

22. 按马经过的格的顺序,将棋盘中的有关格编号为 1,2,3,4,5,6,7,8(如上图).再将方格按编号顺序排在圆周上,其中圆圈对应白色马,圆点对应黑色马.在圆周上很容易看出,每只马至少要走 4 步.

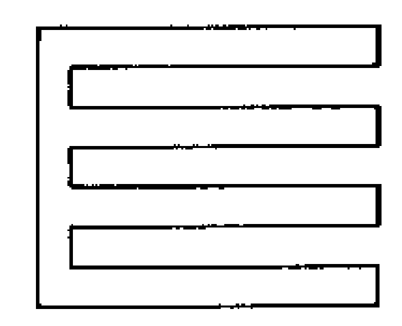
23. 考察最先回到原来位置的棋子 A,设 A 经过某步后回到原来的位置,那么 A 走此步的前一刻为所求.实际上,A 是最先回原的,其他棋子都没有回到原位;另外,A 走过了所有格,从而所有棋子都至少走了一步,即所有棋子都不在原来的位置中.

24. 不能.若棋子回到格 A,则它在水平方向和垂直方向都应移动偶数次,所以移动的总次数为偶数.但依题意,到达棋盘中各个格的总次数为 $1+2+\cdots+64=2080$ 为偶数,而开始时棋子在格 A 中已算经过一次,所以只能进行 $2080-1=2079$ 次移动,矛盾.

26. 4×5 棋盘中马图的一条哈氏链如下(答案不是唯一的):

7	16	3	20	9
2	11	8	15	4
17	6	13	10	19
12	1	18	5	14

(第 26 题图)



(第 27 题图)

27. mn 为偶数时,结论是肯定的;当 mn 为奇数时,结论是否定的.若 mn 为奇数,则共有奇数个格,从而有奇数条边.由于哈氏圈从一点出发回到出发点,从而圈中有偶数条横向边,偶数条纵向边,从而有偶数条边,矛盾.若 mn 为偶数,当 m,n 中有一个为 2 时,结论显然成立.设 $m,n>2$,不妨设 m 为偶数,则存在哈氏圈如上图.

此题的一个等价叙述为:对有序数对 (a,b),(c,d),定义 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ 为它们之间的距离.能否将 mn 个有序数对 (i,j) $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 排成一个圆,使任何两个在圆上相邻的有序数对的距离为 1?

28. $JL(n,n)=n$.按对角线染色即可.

29. $ML(n,n)=1$ (当 $n=1$ 或 2 时);$ML(n,n)=2$ (当 $n>2$ 时).按相间染色即可.

30. $XL(n,n)=n$.一方面,每一行染一色合乎条件.另一方面,棋盘主对角线上有 n 个格,它们必须染不同颜色.

习题四

1. $|X|_{\min}=\left[\dfrac{n^2+1}{2}\right]$.

首先,仿 4.1 中例 2 可证明 $|X|\geqslant\dfrac{n^2}{2}$.另外,我们可构造一个使 $|X|=\left[\dfrac{n^2+1}{2}\right]$ 的集合 X 如下:

当 n 为奇数时,令 $n=2k+1$,此时 $\left[\dfrac{n^2+1}{2}\right]=k^2+(k+1)^2$.令某 $k+1$ 个 $|A_i|=k+1$,某 k 个 $|A_i|=k$;某 $k+1$ 个 $|B_j|=k+1$,某 k 个 $|B_j|=k$.则当 $A_i\cap$

$B_j=\varnothing$ 时，$|A_i \cup B_j|=(k+1)+k=n$. 构造两个表，一个为 $(k+1)\times(k+1)$ 数表，另一个为 $k\times k$ 数表

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1,k+1} \\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2,k+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k+1,1}, & a_{k+1,2}, & \cdots, & a_{k+1,k+1}
\end{array}
$$

$(k+1)\times(k+1)$

$$
\begin{array}{cccc}
b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1,k} \\
b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2,k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{k,1}, & b_{k,2}, & \cdots, & b_{k,k}
\end{array}
$$

$k\times k$

以上述两个表中的共 $2k+1$ 行为 A_i，共 $2k+1$ 列为 B_j.

当 n 为偶数时，令 $n=2k$，此时 $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]=2k^2$. 令 $|A_i|=|B_j|=n/2=k$. 则当 $A_i\cap B_j=\varnothing$ 时，$|A_i\cup B_j|=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$.

构造两个 $k\times k$ 数表：

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1,k} \\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2,k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1}, & a_{k2}, & \cdots, & a_{k,k}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1,k} \\
b_{21}, & b_{22}, & \cdots, & b_{2,k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{k1}, & b_{k2}, & \cdots, & b_{k,k}
\end{array}
$$

以上述两个表中的共 $2k$ 行为 A_i，共 $2k$ 列为 B_j.

2. 考察任何一个数 $k(k=1,2,\cdots,n)$，它在棋盘中共出现 n(奇数)次，而在作为对称轴的那条对角线以外出现偶数次. 于是 k 必在对角线上出现一次.

3. 不妨设第 i 个行和 $S>518$，则可证得第 i 行和第 $9-i$ 行，第 i 列和第 9

$-i$ 列各数之和不小于 $4S-112>1956$,矛盾.

4. 排法如下:

$$\begin{matrix} 0, & 1 & -1 & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1, & 0 \end{matrix}$$

5. 因为 15 为奇数,所以棋盘必有一个格位于中心,我们称之为中心方格.将关于中心方格对称的两个格配对,这样除中心外的 224 个格被配成了 112 个对.对其中任意一个格,用 x 表示此格内填的数,其对称的格内填的数用 x'表示.则 $1\leqslant x\leqslant 56$,$1\leqslant x'\leqslant 56$.所以,$2\leqslant x+x'\leqslant 112$.由抽屉原理,必有一个格对所填的两数和与另一个格对所填的两数和相等.这两组格对中的格合乎要求.

7. 不能.假设有一个 25×25 棋盘合乎条件,则在 50 个积中,1 和 -1 各有 25 个,考虑这 50 个积的积 a.一方面,$a=1^{25}(-1)^{25}=-1$.另一方面,各行的积的积等于数表中所有数的积 b,各列的积的积也等于数表中所有数的积 b,所以 $a=b^2=1$,矛盾.

8. 对任意一个"十字形",用 S 表示它的 5 个方格内的数的和,则 $5\leqslant S\leqslant 45$.但棋盘中有 441 个"十字形",由抽屉原理,结论成立.

9. 不妨设棋盘的左上角方格为黑色,第 i 行第 j 列填的数为 a_{ij},令

$$\sum a_{ij}=P;(\text{当 } i,j \text{ 都是奇数})$$

$$\sum a_{ij}=Q;(\text{当 } i \text{ 为奇数},j \text{ 为偶数})$$

$$\sum a_{ij}=R.(\text{当 } i,j \text{ 都是偶数})$$

则 $P+Q$ 为奇数,$Q+R$ 为奇数,故黑格中 1 的个数为 $P+R=(P+Q)+(Q+R)-2Q$ 为偶数.

10. 棋盘中共填入了 10000 个数,设其中最大的一个数为 M,最小的一个数为 m.从 m 所在的方格到 M 所在的方格用一些依次相邻的方格连接,得到一个方格链.此链中最多有 199 个格.设这些方格中填的数依次为:$a_0=m,a_1,a_2,\cdots,a_t,a_{t+1}=M(t\leqslant 197)$.由题意,有

$M-m=|(a_1-m)+(a_2-a_1)+\cdots+(M-a_t)|\leqslant|a_1-m|+|a_2-a_1|+\cdots+|M-a_t|\leqslant 20\times(t+1)\leqslant 20\times 198=3960$.

所以,棋盘中最多填了 3961 个互不相同的数,由抽屉原理,棋盘中至少有 3 个数相同.

12. 由于 $a_{ij}=\pm 1)$,从而 $p_{ij}=\pm 1$.又共有 1995×1995 个 p_{ij},若 $\sum p_{ij}=1$,则

取值为 1 的 p_{ij} 比取值为 -1 的多 1 个，于是共有 $(1995\times1995-1)/2$（偶数）个 P_{ij} 为 -1. 但表中每一个 -1 都属于 $2\times1995-1$ 个 P_{ij}（比如，$a_{11}=-1$，则 a_{11} 属于 $p_{11},p_{12},\cdots,p_{1,1995},p_{21},p_{31},p_{1995,1}$），从而每一个"$-1$"在 $\prod p_{ij}$ 中共出现了 $2\times1995-1$ 次，于是，1995 个"-1"在 $\prod p_{ij}$ 中共出现了 $(2\times1995-1)\times1995$ 次，所以，$\prod p_{ij}=(-1)^{(2\times1995-1)\times1995}=-1$，矛盾.

13. 设第 i 行的数的和为 A_i，第 j 列的数的和为 B_j，所有数之和为 S. 则

$$S=\sum_{i=1}^{m}A_i=\sum_{j=1}^{n}B_j.$$

另一方面，由条件有 $a_{ij}=A_iB_j$，所以，

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_iB_j=\sum_{i=1}^{m}A_i\sum_{j=1}^{n}B_j=S^2.$$

所以，$S=0$ 或 $S=1$. 但不易否定 $S=0$，估计受阻. 由于不能证明 $S\neq0$，但可以找到某个行的和 $A_i\neq0$. 从而可考察第 i 行各数的和. 由条件，知存在 $a_{ij}\neq0$，所以 $a_{ij}=A_iB_j\neq0$. 于是 $A_i\neq0$，$B_j\neq0$. 这样，

$$A_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}A_iB_j=A_i\sum_{j=1}^{n}B_j=A_iS.$$

又 $A_i\neq0$，所以，$S=1$.

14. 不能. 设存在合乎条件的数表，此表左上角 3×4 矩形内的填数为 a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l（如图）.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l

（第 14 题图）

依题意，$5\mid b+c+f+g$，$5\mid j+e+f+g$，所以 $5\mid b-j$. 同样，$5\mid g+b+f+j$，$5\mid g+b+f+e$，所以 $5\mid j-e$. 同理，$5\mid b-g$，所以 b,j,e,g 关于模 5 同余. 由此可知，数表中共有一半数关于模 5 同余，而另一半的数关于模 5 也同余. 于是，数表中的所有数只属于模 5 的两个不同剩余类，但 1，2，3 分别属于模 5 的三个不同剩余类，矛盾.

16. 其最小值为 8.

17. 从特殊出发，逐步扩充，修改，得到合乎条件的数表. 其过程如下：

$$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\to\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}\to\begin{matrix}1&2+6&3+3\\2+3&3&1+6\\3+6&1+3&2\end{matrix}\to\begin{matrix}1&8&6\\5&3&7\\9&4&2\end{matrix}=\begin{matrix}A(3)\\B(3)\\C(3)\end{matrix}\qquad①$$

其中 $A(3)=(1,8,6)$，$B(3)=(5,3,7)$，$C(3)=(9,4,2)$ 都是 1×3 数表. 对任何一个 1×3 数表：$A=(a,b,c)$，定义 $A+k=(a+k,b+k,c+k)$. 对表①再进行上述构造过程，有

$$\begin{matrix}A(3)\\B(3)\\C(3)\end{matrix}\to\begin{matrix}A(3)&B(3)&C(3)\\B(3)&C(3)&A(3)\\C(3)&A(3)&B(3)\end{matrix}\to\begin{matrix}A(3)&B(3)+18&C(3)+9\\B(3)+9&C(3)&A(3)+18\\C(3)+18&A(3)+9&B(3)\end{matrix}$$

即

1	8	6	23	21	25	18	13	11
14	12	16	9	4	2	19	26	24
27	22	20	10	17	15	5	3	7

由此表可知，$n=9$ 合乎条件．再由上面的构造可知，若 n 合乎条件，则 $9n$ 合乎条件，于是对一切自然数 k，$n=9^k$ 合乎条件．命题获证．

推广：求出所有的自然数 n，使 $1,2,3,\cdots,3n$ 可以排成 $3\times n$ 数表：

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \cdots, & b_n \\ c_1, & c_2, & \cdots, & c_n \end{matrix}$$

满足：(1) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数；

(2) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数．

答案为：$n=12t+9(t\in N)$．首先，设数表中的各数的和为 S，则 $S=1+2+\cdots+3n=3n(3n+1)/2$．注意到每个行和相等，且为 6 的倍数，所以 $3n(3n+1)/2=S=3\times 6s=18s$，即 $n(3n+1)=12s$，故 $3\mid n$．又每个列和相等，且为 6 的倍数，所以 $3n(3n+1)/2=S=n\times 6t=6nt$，即 $3n+1=4t$，故 $4\mid 3n+1$．综上所述，$n=12t+9(t\in N)$．当 $n=12t+9$ 时，令 $n=2k+1(k=6t+4)$，先构造如下数表：

$$\begin{matrix} 1, & 2, & \cdots, & k, & k+1, & k+2, & \cdots, & 2k+1 \\ 4k+1, & 4k-1, & \cdots, & 2k+3, & 4k+2, & 4k, & \cdots, & 2k+2 \\ 5k+4, & 5k+5, & \cdots, & 6k+3, & 4k+3, & 4k+4, & \cdots, & 5k+3 \end{matrix}$$

其中前 k 列从上至下各个数依次为 $i,4k+3-2i,5k+3+i(i=1,2,\cdots,k)$，后 k 列从上至下各个数依次为 $j,6k+4-2j,3k+2+j(j=k+1,k+2,\cdots,2k+1)$，每一列的和都是 $9k+6$．对上述数表进行改造：前 $3t+2$ 列的第一行与第三行对调；第 $5t+4$ 列的第一行与第二行对调；第 $9t+7$ 列的第二行与第三行对调；第 $9t+8$ 列至第 $12t+9$ 列中的第一行与第三行对调．这样得到的数表合乎条件．实际上，每一个行和都为 $(2k+1)(3k+2)=(12t+9)(18t+14)$，每一个列和都为 $9k+6=54t+42$，它们都是 6 的倍数．

18． 不能．

19． 利用递归构造．

20． 一切小于 n 且不整除 n 的正整数．

21． $n=3k+2\ (k\in N)$．

22． 不存在．

23. 不能.

24. 共有 8 种不同数表.

25. 合乎条件的一个数表如下:

1	58	69	84	95	102	91	88	90
99	10	2	87	92	105	114	119	104
136	117	11	20	3	116	115	126	133
147	152	153	13	22	30	4	145	138
174	161	168	171	17	26	33	40	5
50	6	203	184	189	19	34	39	44
52	55	60	7	232	207	21	38	31
57	68	65	66	70	8	261	23	42
46	63	76	85	78	77	80	9	29

27. 最大值为 1989.

28. 计算第 k 天后 n 名选手得分之和 S. 一方面,每天的得分为 $1+2+3+\cdots+n$,所以,$S=k(1+2+\cdots+n)$. 另一方面,每个选手得 26 分,从而 $S=26n$,所以 $k(n+1)=52$. 于是 $(n,k)=(51,2),(25,2),(12,4),(3,13)$. 其中 $(n,k)=(51,1)$ 时,各选手的得分互异,矛盾. 故舍去. 由下面的构造可知,其他 3 种情况都是可能的.

A_1	A_2	$\cdots$	A_{25}
1	2	$\cdots$	25
25	24	$\cdots$	1

A_1	A_2	$\cdots$	A_{12}
1	2	$\cdots$	12
12	11	$\cdots$	1
1	2	$\cdots$	12
12	11	$\cdots$	1

A_1	A_2	A_3
2	3	1
3	1	2
1	2	3
1	2	3
3	2	1

29. 题设条件中涉及到数位上的数字相同与相异,从而想到计算数位上两个数字不同的数对(称为好数对)的个数 S(即同列上异色格的个数). 一方面,对每一个数位,5 个数字不完全相同,设其中有 r 个 1,$5-r$ 个 2,则此数位上的好数对的个数为 $r(5-r)$. 因为 $4\leqslant r(5-r)\leqslant[(5/2)^2]=6$,所以,$n$ 个数位上好数对的个数 S 满足 $4n\leqslant S\leqslant 6n$. 另一方面,每两个 n 位数都恰有 m 个数位上数字相同,这两行中好数对的个数为 $n-m$. 5 个行可构成 $C_5^2=10$ 个 2-行组,从而共有 $10(n-m)$ 个好数对,即 $S=10(n-m)$. 所以,$4n\leqslant 10(n-m)\leqslant 6n$,化简得 $2/5\leqslant n/m\leqslant 3/5$.

31. 当 $n=14$ 时,将 14 个数依次排列为:(1,5,2,6,3,8,12,9,13,10,14,11,

7,4),排法合乎条件.下证 $n>13$.

若 $n=13$,则考察最大的数与最小的数的排法.这两个数不相邻,进而发现1,2,3,11,12,13 中任何两个数不相邻.它们形成6个空,每个空中还须放一个数,但只剩下7个数从而恰有一个空放两个数,其余的各个空放一个数.考虑4的放入.若4不与1相邻,则4放入的空还须放入4以外的两个数,此空放3个数,矛盾.于是4与1相邻.设4放在1,a 之间,则4与 a 之间还须放一个数,所以1与 a 之间放有两个数;同样,10也只能与13相邻,设10放在13与 b 之间,则13,b 之间也要放两个数.若 $a\neq3$ 或 $b\neq1$,则有两个空中分别放有两个数,矛盾.若 $a=13$ 且 $b=1$,则1与13相邻且1与13之间放有4与10.但4,10之间还要放一个数,所以1与13之间至少放有3个数.矛盾.

32. 先看 $n=3$,设所填的3个数为 a,b,c,则 $a=bc,b=ca,c=ab$,若 $a=0$,则 $b=0$,矛盾.若 $a=1$,则 $b=c$,矛盾.由此可知,所填的数都不是0和1.由前两个等式得 $a=c^2a$,所以,$c=-1$,同样,$b=a=-1$,矛盾.所以 $n\neq3$,类似地讨论,有 $n\neq4,n\neq5$. $n=6$ 是可能的,圆周上的6个数依次为:3,2,2/3,1/3,1/2,3/2.若 $n>6$,任取两个相邻的数 a,b,依次填下去的数分别为:$b/a,1/a,1/b,a/b,a$.于是,第一个位置上的数必与第七个位置上的数相等,矛盾.故所求的 n 是唯一的:$n=6$.

33. 14个"和"的所有可能取值为:14,6,2,−2,−6,−10.设正方体8个顶点上所标的数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$,则正方体上14个数的积为:$x_1^4x_2^4\cdots x_8^4=1$,从而这14个数中 -1 的个数为偶数.于是这14个数的和 S 只可能为14,10,6,2,−2,−6,−10,−14.显然,$S=-14$ 是不可能的.其次,若 $S=10$,则14个数中恰有两个数为 -1,于是至少有一个且至多有2个顶点上的数为 -1.若只有一个顶点上标数 -1,则有3个面上标数 -1,矛盾;若有两个顶点上标数 -1,则至少有一个面上标数 -1,矛盾.所以 S 不可能为10.另外,当所有顶点标数1时,$S=14$;当恰有一个顶点标数 -1 时,$S=6$;当恰有一个面上的对角两顶点标数 -1 时,$S=2$;当恰有一条正方体的对角线上两顶点标数 -1 时,$S=-2$;当有一个顶点标数 -1,且与此顶点相邻的顶点上都标数 -1 而其余顶点都标数1时,$S=-6$;当恰有一条正方体的对角线上两顶点标数1而其余顶点都标数 -1 时,$S=-10$.

36. 由4.4例4中红格的构造规律:一个长为8的圈,每相邻两个圈有两个公共点,可进行类似的构造.不难发现,只有 $a_{33},a_{36},a_{63},a_{66}$ 这4个格中可以放 -1.

37. 若某个格的棋子数恰比其他各个格都多1,则称之为奇异格.考察棋盘

左上角的 2×2 的子表，在此子表中，每次放入或取走的棋子数为偶数．从而 2×2 的子表中的棋子数恒为偶数．于是，2×2 的子表中不可能有奇异格，否则 2×2 的子表中的棋子数为 $4k+1$ 的形式，矛盾．同样考察其他的 2×2 的子表，也不可能有奇异格．

38． 答案都是否定的，两种操作都保持白色方格的个数为偶数．(1) 设对某行操作，此行有 k 个白色格，$8-k$ 个黑色格．操作后，得到 k 个黑色格，$8-k$ 个白色格．白色格的个数增加了 $8-k-k=8-2k$(偶数)．(2) 设 2×2 正方形内有 k 个白色格，$4-k$ 个黑色格．操作后，得到 k 个黑色格，$4-k$ 个白色格．白色格的个数增加了 $4-k-k=4-2k$(偶数)．

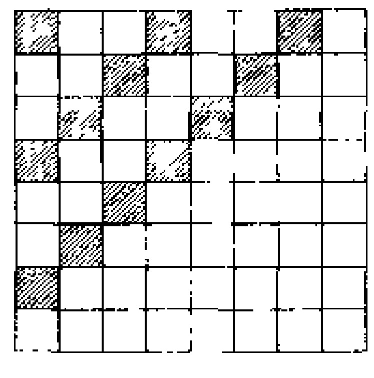
39． 不可能．注意此操作的一个显著特点：在放子的同时，将有关棋子改变成相反的颜色．从而要估计每个子在操作过程中改变颜色的次数．显然，棋子 A 改变 r 次颜色等价于 A 放入时有 r 个空格与之相邻．从而想到计算放子时该格的相邻空格数，我们称之为该格的"度"．下用图论语言叙述．每当某个格 A 放入一个黑色子，就将此格中心与相邻空格的中心连线段．若格 A 放入白色棋子时不与它的邻格 B 相连，则表明格 B 已放有棋子．根据规则，B 放子时已与 A 连了线段．这样，除右上角一个格未连线以外，任何两个相邻格都已连了一条线段．于是，共连了奇数条线段．(实际上，先想象右上角的一格也连了 3 条线段，则共连了偶数条线段，是因各个点的度的和为 4 的倍数．去掉这 3 条线段，还有奇数条线段．)这样，必有某个时刻，当格 A 放入一个白色子时，它连了奇数条线段．这表明 A 有奇数个相邻的空格．而它的每个相邻的空格放子时，A 都要改变颜色，所以，A 共改变奇数次颜色．这样，A 中放的子最终变为黑色．

40． 由 4.4 中例 1 可知，最多操作 4 次即可．又令 $a_1=a_2=\cdots=a_8=1, a_9=-1$．则必须操作 4 次，于是 r 的最小值为 4．

41． 选取棋盘中的一个列 b，对列 b 操作若干次，可使列 b 中的最小数变为 1．然后对列 b 中所有 1 所在的一些行进行操作，使这些 1 都变为 2．再对列 b 操作，使 2 又变为 1．这样，列 b 中原来非 1 的数都被减小，而 1 仍然是 1．如此下去，可使列 b 中所有数都变为 1．最后对列 b 操作，使列 b 中的所有数都变为 0．同样可使其他各列的数都变为 0．

43． (1) 乙有必胜策略．将格 a_{11}, a_{14}, a_{17} 称为好格，且与任何一个好格在同一条 45°斜线上的方格都称为好格(图中阴影方格)．任何一个 5×5 矩形中至少有一个角上的方格为好格，因此乙只要保持所有好格为白色即可获胜．而这是可能的，因为甲不可能一次将两个好格同时染黑色．

(2) 甲有必胜策略.棋盘中共有16个5×5矩形,而每两个5×5矩形不会同时以某个方格为其角上的格,因此,乙要获胜,必须保持不少于32个白色方格,而甲可以干扰他实现这一目标:甲在最初的32次染色中染遍所有64个方格,乙在相应的32次染色中至多能使32个小方格恢复为白色.之后,若棋盘中有两个白色格相邻,甲就将它们染黑色,乙再将其中一个恢复白色,棋盘中只有31个白色格,甲胜;如果棋盘中任何两个白色格不相邻,则棋盘的方格的颜色是黑白相间(如国际象棋盘),这时,棋盘中存在一个5×5矩形的角上的方格都是黑色,甲胜.



(第43题图)

习题五

3. 若 $AB /\!/ CD$,则 A 关于线段 BD 的中点对称的点 A' 在 CD 上.又 $\angle ADC + \angle BCD < 180°$,所以 $DC > AB$.从而 A' 在 C,D 之间,所以格点 A' 被 $\triangle PCD$ 盖住.若 AB 与 CD 不平行,不妨设 A' 不被 $\triangle PCD$ 盖住.由对称性,不妨设 $\angle DAB + \angle CDA \geqslant 180°$,则 $AA'CD$ 又是格点凸四边形,且 $A'D$ 交 AC 于 P',A' 被 $\triangle BPC$ 盖住,所以 $\triangle P'CD$ 被 $\triangle PCD$ 盖住.结论成立.

6. 设 $P(m/2, n/2)$,格点 $A(a,b)$ 关于 P 对称的点为 $B(x,y)$,则由中点坐标公式,有 $x = m - a$,$y = n - b$ 为整数.

7. 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A,B,C 都是格点,对角线 AC 的中点为 P,则 P 为格点或半格点,由上题,格点 B 关于 P 的对称点 D 必为格点.

8. 将凸图形放在棋盘中,然后将棋盘划分为若干个互不相交的 2×2 正方形,其中 O 是某个正方形的顶点,再将所有 2×2 正方形重叠在一起.由于 A 的面积大于4,所以重叠后的 2×2 正方形中凸图形碎片必有公共点,由此即可完成证明.

10. 以 $O(\sqrt{2}, 1/3)$ 为圆心,则所有格点到 O 的距离不同,由此可作出同心圆的集合.

11. 答案是否定的.实际上,对一个格点等腰三角形 ABC,$AC = BC$,设 $C(0,0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$u = AC = BC$,$v = AB$,则

$$u^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2, \qquad ①$$

$$v^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2(u^2 - x_1y_2 - x_2y_1). \qquad ②$$

由此可知，v 为偶数. 设 AB 的中点为 M，则 $|AM|$ 为整数. 而且，若 x_2-x_1 为奇数，则 y_2-y_1 为奇数，于是，$(x_2-x_1)^2\equiv1 \pmod 4)$，$(y_2-y_1)^2\equiv1 \pmod 4$，所以 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\equiv2 \pmod 4$. 这与 $v^2\equiv0 \pmod 4$ 矛盾. 所以 x_2-x_1，y_2-y_1 都为偶数，M 为格点. 又 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$，不妨设 $y_1\neq y_2$，则由②，有

$$
\begin{aligned}
|CM|^2&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2\\
&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\right)^2\right]\\
&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left[1+\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right)^2\right]\\
&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{v}{y_2-y_1}\right)^2\\
&=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{v}{y_2-y_1}\right)^2.
\end{aligned}
$$

又 $|CM|^2=u^2-|AM|^2$ 为整数，所以 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{v}{y_2-y_1}\right)^2$ 为整数，又 $\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{v}{y_2-y_1}$ 为有理数，所以 $|CM|=\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{v}{|y_2-y_1|}$ 为整数.

13. $J(m,n)=mn(m+1)(n+1)/4$.

15. $A(n)=C_{2n+1}^{n}$. 首先证明：点 A 出发后在 x 轴上走 n 步到达点 $n-2k$ 且 A 不通过 x 负半轴上的点的不同路径数为 $C_n^k-C_n^{k-1}$. 实际上，若允许 A 通过 x 负半轴上的点，那么，从 O 到达 $n-2k$，必须有 $n-k$ 步向右走，k 步向左走，共有 C_n^k 种方法. 考察上述走法中通过 x 轴负半轴上的点的走法，对这样的一种走法（简称坏走法），必定在某一步到达点 $P(-1,0)$. 设经过 i 步以后第一次到达点 $P(-1,0)$. 我们设想一个点 B，B 从 $(-2,0)$ 出发，B 的前 i 步走的路线与 A 的路线关于直线 $x=-1$ 对称，后面的路线与 A 相同，则 B 是从 $(-2,0)$ 到 $(n-2k,0)$ 的无其他限定条件的在 x 轴上的运动路线. 它有 $n+1-k$ 步向右和 $k-1$ 步向左，其方法数为 C_n^{k-1}. 因 n 步可以走到点 $(n-2k,0)$ $(k=0,1,2,\cdots,[n/2])$，从而从 O 出发在 x 轴上走 n 步的好路径数为 $\sum_{k=0}^{[n/2]}(C_n^k-C_n^{k-1})=C_n^{[n/2]}$. 最后证明：上半平面 $Z\times Z^+$ 上从 $(0,0)$ 走 n 步的好路径数与 x 轴正半轴上从 $(0,0)$ 出发走 $2n+1$ 步的好路径数相等，即它们可建立一一对应. 考察 $Z\times Z^+$ 上走 n 步的路径，它可以用 L,R,U,D（左，右，上，下）构成的序列表示，但 U 的次数始终不少于 D 的次数，

且数列的项数为 n(n 步).将 L 换成 LR,R 换成 RL,U 换成 RR,D 换成 LL,得到一个新序列,在此新序列的前面加上一个 R,所得的序列便表示 x 轴正半轴上走 $2n+1$ 步的路径.这是因为,U 不少于 D,等价于 R 不少于 L.从 $2n+1$ 步中选 $[(2n+1)/2]$步向右走,有 $C_{2n+1}^{[(2n+1)/2]}=C_{2n+1}^{n}$种方法,故 $A(n)=C_{2n+1}^{n}$.

另证: 用 $g_k(n)$表示从$(0,k)$走 n 步不经过下半平面的路径数.显然,对 $k\geqslant 1$,有

$g_k(n)=2g_k(n-1)+g_{k+1}(n-1)+g_{k-1}(n-1)$, (第一步有 4 种走法) ①

$g_0(n)=2g_0(n-1)+g_1(n-1)$, (第一步有 3 种走法) ②

$g_0(1)=3$, 且 $k\geqslant n$ 时, $g_k(n)=4^n$. (每步有 4 种走法) ③

下面用数学归纳法证明,对一切 $k\in N$,都有 $g_k(n)=\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2n+1}^{n-j}$.

实际上,我们只须证明$\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2n+1}^{n-j}$满足①,②,③.

首先,$\sum\limits_{j=0}^{0}C_{2+1}^{1-0}=3=g_0(1)$,结论成立;

对于 $k\geqslant n$,$\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2n+1}^{n-j}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_{2n+1}=\sum\limits_{i=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{i}/2=2^{2n+1}/2=4^n$,③满足;

其次,$g_0(n)=C_{2n+1}^{n-0}=C_{2n+1}^{n}$,$g_k(n-1)=C_{2n-1}^{n-1}$, $g_1(n-1)=C_{2n-1}^{n-1}+C_{2n-1}^{n-2}$,直接代入,可知②满足;

最后,$2\sum\limits_{j=0}^{k}C_{2n-1}^{n-1-j}+\sum\limits_{j=0}^{k+1}C_{2n-1}^{n-1-j}+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_{2n-1}^{n-1-j}$

$$=2\sum_{j=0}^{k}C_{2n-1}^{n-1-j}+\left(\sum_{j=0}^{k}C_{2n-1}^{n-2-j}+C_{2n-1}^{n-1}\right)+\sum_{j=0}^{k}C_{2n-1}^{n-j}-C_{2n-1}^{n}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\left(C_{2n-1}^{n-1-j}+C_{2n-1}^{n-2-j}\right)+\sum_{j=0}^{k}\left(C_{2n-1}^{n-j}+C_{2n-1}^{n-1-j}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{k}C_{2n}^{n-1-j}+\sum_{j=0}^{k}C_{2n}^{n-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(C_{2n+1}^{n-j}+C_{2n-1}^{n-2-j}\right)+\sum_{j=0}^{k}\left(C_{2n-1}^{n-j}+C_{2n-1}^{n-1-j}\right).$$

所以①满足.令 $k=0$,得路径数为 $g_0(n)=C_{2n+1}^{n}$.

16. 路线的每一步都有 4 种走法:上、下、左、右.因此,其路径是长为 $2n$ 的 4 个字:"上、下、左、右"的排列.由于回到出发点,从而"左"、"右"出现的次数相等,"上"、"下"出现的次数也相等.设左、右各出现 k 次,则上、下各出现 $n-k$ 次.先在 $2n$ 个位置中选 n 个排左或上,有 C_{2n}^{n}种方法,再在这 n 个位置中选 k 个排左,有 C_n^k种方法,在另外 n 个位置中选 k 个排右,有 C_n^k种方法,于是,合乎条件的路径数为

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(C_{2n}^{k})^2 = (C_{2n}^{n})^2.$$

17. 由 O 运动到 M 的路径(允许通过 x 轴下方的点)的条数为 C_{2n}^{n}.其中通过 x 轴下方的路径必与直线 $y=-1$ 相交,这样的路径与从 $O'(0,-2)$ 到 M 的路径建立一一对应,有 C_{2n}^{n+1} 条,于是合乎条件的路径的条数为 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}$.

18. 直角坐标系中,用 $O(0,0)$ 和 $P(2n,0)$ 分别表示售票开始和售票结束.于是,不出现没有零钱而等待找补的售票过程与从 $O(0,0)$ 到 $P(2n,0)$ 的不经过 x 轴下方任何点的路径一一对应.由上题知,这样的路径有 $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}$ 条,而总路径有 C_{2n}^{n} 条,所以所求的概率为 $(C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1})/C_{2n}^{n}=1/(n+1)$.

19. 乙有必胜策略.假定甲先标出一个点 A,乙总可以选定一个不是 A 的格点作为对称中心 O,乙标出 A 关于 O 对称的一个格点.以后每当甲标出一个格点,乙便标出甲所标出的格点关于 O 的对称点,因此乙可获胜.

20. 以 P 为原点,格线为坐标轴建立直角坐标系.易知,若 (x,y) 在圆周上,则 $(\pm x,\pm y)$,$(\pm y,\pm x)$ 都在圆周上.如果 $x\neq y$,$xy\neq 0$,则这样的点共有 8 个.在其余的情形下,这样的点只有 4 个.由于 1988 模 8 余 4,所以圆周上的 1988 个点不能都属于第一种情形.不妨设圆周上的一个格点 $A(x,y)$ 属于第二种情形,则 $x=y$ 或 $xy=0$.由 $R=\sqrt{x^2+y^2}$ 知,或者 $R=\sqrt{2}|x|$(当 $x=y$ 时),或者 $R=|x|$ 或 $|y|$(当 $xy=0$ 时).

21. 易知,若正方形有三个顶点为格点,则第四顶点也是格点,于是只要证明内切圆在两直角边上的切点为格点即可.

22. 9770.